

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO



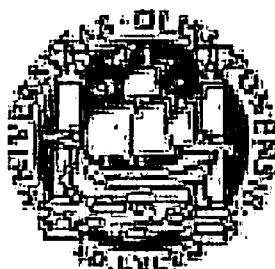
AVALIAÇÃO REGULADORA NO ENSINO SECUNDÁRIO
PROCESSOS USADOS PELOS ALUNOS EM
INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Paulo Jorge Ribeiro Dias

MESTRADO EM EDUCAÇÃO
(Didáctica da Matemática)

2005

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO



AVALIAÇÃO REGULADORA NO ENSINO SECUNDÁRIO
PROCESSOS USADOS PELOS ALUNOS EM
INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Paulo Jorge Ribeiro Dias

MESTRADO EM EDUCAÇÃO
(Didáctica da Matemática)

Orientado pela Professora Doutora M^a Leonor de Almeida Domingues dos Santos

2005

RESUMO

O presente estudo teve por objectivo estudar os processos que os alunos, do ensino secundário, usam como forma de dar resposta às dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos com que se confrontam nas investigações matemáticas. Acredito que este conhecimento é uma forma de contribuir para a concretização de uma avaliação reguladora. Assim, pretendi conhecer os processos de interpretação, os processos de investigação, as dificuldades, os erros e a sua função no desenvolvimento da actividade, as interacções e outros recursos que os alunos do ensino secundário utilizam quando se confrontam com a necessidade de desenvolver uma investigação matemática, num contexto de sala de aula.

Para a concretização deste trabalho foi adoptada a metodologia qualitativa e foram estudados quatro alunos do ensino secundário (estudos de caso). Os alunos foram confrontados com a necessidade de desenvolver quatro investigações matemáticas, duas de geometria e duas de funções. Os dados foram recolhidos através da gravação, da observação, do diário de bordo, da entrevista semi-estruturada, do relatório e da reflexão escrita produzidos pelos alunos sobre o trabalho desenvolvido.

A análise dos dados recaiu sobre a actividade de investigação e avaliação dos alunos, nomeadamente sobre a interpretação da tarefa, o desenvolvimento da tarefa e a auto-avaliação do trabalho e a sua compreensão à luz das perspectivas manifestadas pelo aluno, face ao processo de ensino e aprendizagem.

Relativamente aos resultados, são identificados e caracterizados os processos que os alunos usam no primeiro confronto e no desenvolvimento de uma investigação matemática, os recursos, os erros e a reflexão. Perante a necessidade de definir um percurso de investigação, os alunos usam processos como traduzir, experimentar inicial, interiorizar e ancorar. Durante a investigação os processos identificados são: aprofundar, ziguezaguear, conjecturar, experimentar e solucionar e conjecturar, experimentar e generalizar. Ao nível dos recursos, os alunos usam as interacções com o professor para ultrapassar dificuldades, para reflectir e para validar o seu trabalho, as interacções com os seus pares para ultrapassar dificuldades, para identificar erros e para identificar semelhanças e diferenças no trabalho realizado e outros recursos, como é o caso da interacção crítica consigo próprio e de materiais pedagógicos ou outros. A função que os alunos atribuem aos raciocínios erróneos que cometem situa-se no orientar, ensinar e desviar. Quanto às reflexões, os alunos reflectem sobre as interacções que estabelecem no seio da actividade investigativa, os erros e dificuldades surgidas e a apreciação global do trabalho realizado (auto-avaliação).

conclusões?

Apesar deste estudo depender da escolha dos alunos e das experiências situadas que os mesmos têm da vivência da escola, acredita-se que os resultados encontrados são a realidade de muitos alunos na aprendizagem da matemática. Recomenda-se, por isso, a continuação do estudo da problemática da avaliação, principalmente na vertente da harmonização entre a avaliação e o currículo.

Palavras-chave: interacções na sala de aula; actividade do aluno; investigações matemáticas; avaliação reguladora; auto-regulação; aprendizagem da matemática.

SUMMARY

The present study intended to deepen the processes that the students, in the secondary school, use as form of giving answer to the difficulties, obstacles and wrong reasoning with that the students are confronted in the mathematical investigations. I believe that this knowledge is a form of contributing for the materialization of a formative evaluation. Like this, I intended to know the interpretation processes, the investigation processes, the difficulties, the mistakes and the function that have in the development of a work, the relationships and other resources that seek in the secondary school when they are confronted with the need of developing a mathematical investigation, in a classroom context.

For the materialization of this work the qualitative methodology was used and four students of the secondary school were studied (case studies). The students were confronted with the need of developing four mathematical investigations, two of geometry and two of functions. The data were collected through the recording, of the observation, of the log book, of the semi-structured interview, of the report and of the reflection written produced by the students on the developed work.

The analysis of the data relapsed about the investigation work and the evaluation of the students' learning, namely on the interpretation of the task, the development of the task and the solemnity-evaluation of the work and his/her understanding to the light of the perspectives manifested by the student, face to the teaching process and learning.

Relatively to the results, they are identified and characterized the processes that the students use in the first confrontation and in the development of a mathematical investigation, the resources, the mistakes and the reflection. Before the need to define an investigation course, the students use processes how to translate, to try initial, to internalize and to anchor. During the investigation the identified processes are: to deepen, to zigzag, to conjecture, to try and to solve and to conjecture, to try and to generalize. At the level of the resources, the students use the help with the teacher to cross difficulties, to rethink and to validate the work, the relationship with their pairs to cross difficulties, to identify mistakes and to identify similarities and differences in the accomplished work and other resources, as it is the case of the solemnity-critic with itself and of materials pedagogic or other. The function that the students attribute to the wrong reasoning that commit locates in guiding, to teach and to deviate. As for reverse-setting out the accomplished work, the students think on the relationships that establish in the breast of the investigation work, the mistakes and appeared difficulties and the global appreciation of the accomplished work (solemnity-evaluation).

In spite of this study to depend on the students' choice and of the located experiences that the same ones have of the existence of the school, it is believed that the found results are the many students' reality in the learning of the mathematics. It is recommended, for that, the continuation of the study of the problem of the evaluation, mainly in the slope of the harmonization between the evaluation and the curriculum.

Keywords: relationships in the classroom; work of the student; mathematical investigations; formative evaluation; self-regulation; learning of the mathematics.

AGRADECIMENTOS

À professora Leonor Santos pelo que me ensinou, pelo incentivo e pela disponibilidade demonstrados na orientação desta tese...

À minha mulher, Hortense, pela compreensão, apoio e incentivo ...

Aos meus filhos, Catarina e Duarte, pelo tempo que não tive para eles...

Aos meus restantes familiares...

Aos colegas que me deram força...

A todos o meu obrigado

Aos meus alunos

Índice

	Pág.
INTRODUÇÃO	
Problema e questões de investigação	1
Pertinência e significado da investigação	2
Organização e apresentação da investigação	6
CAPÍTULO I – AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS	
Avaliação no ensino secundário	7
Avaliação formativa	12
Avaliação formativa, termos e conceitos	13
O papel da regulação e da auto-avaliação	16
As interações estabelecidas pelo aluno e a reorientação da sua actividade	19
Integração da avaliação formativa no processo de ensino e aprendizagem	23
A importância da reflexão dos alunos para a avaliação formativa.....	28
Como desenvolver uma modalidade de avaliação formativa	32
Síntese do capítulo	36
CAPÍTULO II – INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA	
O que é saber matemática	39
Integração das investigações matemáticas no currículo	43
A pertinência das investigações matemáticas na sala de aula	47
Os alunos e a investigação matemática	53
Síntese do capítulo	58
CAPÍTULO III – METODOLOGIA	
O método de investigação	62
Uma reflexão sobre a minha prática	65
Participantes	67
O trabalho de campo	70
Instrumentos de recolha de dados	71
A entrevista	72
A observação de aulas	72
O Diário de bordo	73
Os relatórios produzidos pelos alunos	74
As reflexões escritas dos alunos	74
Análise de dados	74
CAPÍTULO IV – AS EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM	
Tarefa 1: Unindo os pontos médios de um quadrilátero	
Descrição e implementação da tarefa	76
Desenvolvimento da actividade de investigação	79
Tarefa 2: Pavimentações	
Descrição e implementação da tarefa	84
Desenvolvimento da actividade de investigação	87
Tarefa 3: Zeros de uma função polinomial	
Descrição e implementação da tarefa	93

Desenvolvimento da actividade de investigação	94
Tarefa 4: Uma investigação com funções cúbicas	
Descrição e implementação da tarefa	100
Desenvolvimento da actividade de investigação	101
Síntese do capítulo	107
 CAPÍTULO V – O ANDRÉ	
Apresentação	111
Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem	111
Actividade de investigação e avaliação	114
Interpretação da tarefa	114
Desenvolvimento da tarefa	117
Auto-avaliação do trabalho	125
Síntese do capítulo	130
 CAPÍTULO VI – O LOURENÇO	
Apresentação	133
Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem	133
Actividade de investigação e avaliação	137
Interpretação da tarefa	137
Desenvolvimento da tarefa	140
Auto-avaliação do trabalho	145
Síntese do capítulo	151
 CAPÍTULO VII – A MARTA	
Apresentação	154
Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem	154
Actividade de investigação e avaliação	157
Interpretação da tarefa	157
Desenvolvimento da tarefa	160
Auto-avaliação do trabalho	166
Síntese do capítulo	172
 CAPÍTULO VIII – A RITA	
Apresentação	175
Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem	175
Actividade de investigação e avaliação	180
Interpretação da tarefa	180
Desenvolvimento da tarefa	182
Auto-avaliação do trabalho	188
Síntese do capítulo	194
 CAPÍTULO IX – CONCLUSÕES	
Síntese do estudo	198
Apresentação e discussão dos resultados	200
Processos	200
Recursos	206
Erros	213
Reflexão	215
Reflexão final	221

Limitações do estudo	223
Recomendações	224
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	227
ANEXOS	246
Anexo I – Guião da entrevista Anexo II – Grelha de registo da observação de aulas Anexo III – Guião de elaboração do Diário de bordo Anexo IV – Guião da reflexão escrita do aluno Anexo V – Tarefa 1: unindo os pontos médios de um quadrilátero Anexo VI – Tarefa 2: pavimentações Anexo VII – Tarefa 4: uma investigação com funções cúbicas Anexo VIII – Primeira página do relatório da Rita na actividade pavimentações	

Índice de figuras

	Pág.
Figura 1 – Interpretação do processo de avaliação reguladora	38
Figura 2 – Processos envolvidos na actividade de Investigação matemática.....	57

Índice de quadros

	Pág.
Quadro 1: Feedback descritivo nas interações em tarefas de investigação	34
Quadro 2: Plano de obtenção de resposta às questões do estudo e cruzamento de dados	71
Quadro 3: Concretização das aulas gravadas	73
Quadro 4: Características incluídas nos relatórios escritos do André	129
Quadro 5: Características incluídas nos relatórios escritos do Lourenço	150
Quadro 6: Características incluídas nos relatórios escritos da Marta	171
Quadro 7: Características incluídas nos relatórios escritos da Rita	194
Quadro 8: Quadro resumo dos aspectos incluídos pelos alunos nos relatórios escritos	218

Siglas

AGD: Ambiente Geométrico Dinâmico

APM: Associação de Professores de Matemática

GAVE: Gabinete de Avaliação Educacional

DES: Departamento do Ensino Secundário

MPT: Matemática Para Todos

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

OCDE: Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico

PISA: Programme for International Student Assessment

INTRODUÇÃO

Problema e questões de investigação

No final do século XX e início do século XXI discute-se ao nível dos sistemas educativos as formas e as modalidades de avaliação que poderão servir para melhorar o desempenho e a aprendizagem dos alunos (Allal, 1986; Abrecht, 1991; Perrenoud, 1999, 2004; Shepard, 2001). Vários estudos internacionais evidenciam que os alunos manifestam desempenhos diferentes ao nível da matemática, o que se pode atribuir às diferentes culturas de avaliação em que os sistemas educativos estão organizados. Uns baseiam-se na premissa de que a função avaliativa é a de classificar e certificar. Outros desenvolveram uma cultura de melhorar as aprendizagens, ajudarem os alunos a superarem as suas dificuldades, ou seja colocar a ênfase na melhoria e regulação do processo de ensino e aprendizagem.

No domínio da avaliação reguladora, em que a avaliação deve contribuir para que os alunos desenvolvam as suas competências, se tornem autónomos, responsáveis e organizadores da sua própria aprendizagem, é necessário conhecer os processos que servem para melhorar as aprendizagens dos alunos e proporcionar uma participação activa dos mesmos.

O estudo dos processos que os alunos, do ensino secundário, usam como forma de dar resposta às dificuldades, obstáculos e aos raciocínios erróneos com que se confrontam nas investigações matemáticas constitui o principal objectivo desta investigação. Assim, pretende-se dar a conhecer os processos de interpretação, os processos de desenvolvimento, os recursos, a função dos erros e a reflexão que os alunos do ensino secundário desenvolvem quando se confrontam com investigações matemáticas, num contexto de sala de aula. Para contribuir para o conhecimento desta temática procura-se responder às seguintes questões:

- Qual o tipo de processos que o aluno desenvolve quando se confronta com uma investigação matemática?
- Qual o tipo de recursos que o aluno procura quando sente dificuldades e como os usa?
- Qual a função atribuída aos erros na concretização da tarefa?
- De que modo o aluno reflecte sobre o processo desenvolvido e reorienta o seu trabalho com vista ao sucesso?

Acredita-se que a resposta a estas questões sugere o conhecimento dos processos de êxito para os alunos numa actividade de investigação matemática. O confronto entre a necessidade de responder a uma solicitação e a consciencialização de que é necessário desenvolver mecanismos de procura de resposta, promove a aprendizagem através da auto-avaliação e faz emergir a compreensão de conhecimentos e capacidades. No processo de investigação, o aluno depara-se com vários momentos em que é necessário reflectir e avaliar os níveis de concretização de um trabalho e buscar os recursos necessários à sua progressão. Quando esta intervenção ocorre no contexto da sala de aula, em investigações matemáticas, também é de acreditar que os alunos se dotam de um método de avaliação pronto a ser aplicado em qualquer momento do processo de aprendizagem. A avaliação reguladora permite que os alunos tomem consciência do ponto em que se encontram, dos resultados que terão de alcançar e das aprendizagens que terão de desenvolver para os atingir.

Este estudo contribui, também, para o conhecimento sobre a harmonização entre a avaliação e o ensino, o que constitui um dos grandes desafios à comunidade de educação matemática para o século XXI. Segundo Santos (2004) existe ainda um grande fosso entre aquilo que são as orientações curriculares e os indicadores de que se dispõe sobre as práticas dos professores. A avaliação enquanto parte integrante do currículo ainda não parece ser uma realidade generalizada em Portugal. Este objectivo tem inúmeras vantagens para o processo de ensino e aprendizagem, especialmente quando se considera que a avaliação pode servir para que os professores aprendam sobre o que os alunos compreendem e o que podem fazer (Abrantes & Leal, 1991; Black & Wiliam, 1998; Bonniol, 1989; Hadji, 1994; Jorro, 2000; NCTM, 1999; Sadler, 1998; Shepard, 2001; Webb & Coxford, 1993).

Pertinência e significado da investigação

A integração da avaliação no processo de ensino e aprendizagem tem vindo a ganhar maior visibilidade nos documentos institucionais nos últimos anos (Ministério da Educação, 1991, 1997, 2001). Os programas de Matemática têm evoluído no sentido de considerar que os objectivos da aprendizagem incluem não só conhecimentos que os alunos adquirem, mas também as capacidades e as atitudes que desenvolvem. Também é evidente a crescente valorização da avaliação formativa, salientada quando se pretende

Introdução

incluir no processo de aprendizagem aspectos como a resolução de problemas ou a comunicação:

A avaliação consiste no processo regulador das aprendizagens, orientador do percurso escolar e certificador das diversas aquisições realizadas pelos alunos (Ministério da Educação, 2004, p.1934)

Pretende-se que a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável pela sua aprendizagem (Ministério da Educação, 2001, p.13)

Em particular recomendamos fortemente que em cada período um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática (sob a forma de resolução de problemas, demonstrações, composição/reflexões, projectos, relatórios, notas e reflexões históricas, etc.) que reforce a importante componente da comunicação matemática. (Ministério da Educação, 1997, p.13)

Através destas alterações institucionais promove-se a melhoria do processo de ensino e aprendizagem através da criação de oportunidades para que o aluno seja responsabilizado pela sua participação activa, melhore a sua motivação e auto-estima, tome consciência do que sabe, procure respostas e partilhe o que compreende e como o faz. Implemente uma avaliação reguladora das aprendizagens.

A avaliação reguladora fornece ao professor e aos alunos o nível de concretização das aprendizagens e o que é necessário fazer para corrigi-las ou melhorá-las. Permite conhecer os saberes, as capacidades e as atitudes, fazendo o ponto da situação e tornando conscientes as diferenças entre os desempenhos dos alunos e as exigências do sistema educativo, para que se possam aproximar.

Levar à prática a concretização da avaliação reguladora, passa por ajustar de forma mais sistemática e individualizada as intervenções do professor e as situações didácticas, de forma a rentabilizar as aprendizagens (Bonniol, 1989; Nunziati, 1990; Perrenoud, 1998, 1999). Isto exige que a avaliação usada durante o processo de ensino e aprendizagem seja orientada para a regulação, na assumpção que todos os alunos aprendem, embora de uma forma diferenciada (Perrenoud, 1986; Hadji, 1994; Rafael, 1998). Este modelo pressupõe a recolha de informação sobre os progressos e dificuldades, a interpretação e o diagnóstico dos factores que estão na origem das dificuldades e a adaptação das actividades de ensino e aprendizagem de acordo com a interpretação das informações recolhidas (Allal, 1986; Abrecht, 1991; Machado, 1998).

No entanto, é de referir que a avaliação realizada pelo aluno, a auto-avaliação, é um conjunto de operações metacognitivas do sujeito onde este toma consciência dos diferentes momentos da sua actividade cognitiva e possibilita o seu desenvolvimento como sujeito autónomo, crítico e interveniente. O conhecimento dos diversos processos que os alunos usam na interpretação e desenvolvimento de investigações matemáticas, os recursos que procuram quando sentem dificuldades, a função que atribuem aos raciocínios erróneos e como reflectem sobre o processo investigativo e reorientam o seu trabalho com vista ao sucesso facilita a adopção de uma atitude de avaliação reguladora, uma vez que pode ser melhorada a compreensão das atitudes dos alunos, a interacção e consequentemente a actuação do professor (Perrenoud, 1988).

Nas investigações matemáticas, os alunos têm oportunidade de se envolverem em tarefas matemáticas de forma diferenciada e mais profunda (Fonseca, 2000), de desenvolverem a capacidade de reflexão (Mendes, 1997) e de comunicação (Rocha, 2002a), de construírem estruturas do conhecimento matemático (Costa, 2002), de compreenderem o que é uma investigação e o papel que lhes cabe ao assumir essa actividade (Ponte, 2003), de alterarem as suas concepções acerca da matemática (Segurado, 1997) e de aprenderem matemática a fazer matemática (Santos et al., 2002).

No seio da actividade investigativa, o aluno tem oportunidade de experimentar processos que, através das interacções com o professor, com os seus colegas e outros recursos, permitem identificar formas de ultrapassar dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos (Abrecht, 1991). Não se trata apenas de solicitar aos alunos que dêem resposta a uma proposta de trabalho, procura-se que os alunos aprendam fazendo e também reflectindo sobre o que fazem.

Segundo Allal (1986), a avaliação formativa é uma alternativa que pode ocorrer em diferentes momentos do processo de ensino e aprendizagem. Pode verificar-se no início de uma tarefa ou de uma situação didáctica, ao longo do processo de aprendizagem ou após uma sequência de aprendizagens. No entanto, é necessário implementar a harmonização entre a avaliação e o ensino.

Os princípios da regulação das aprendizagens, da comunicação, da coerência de objectivos, metodologias e avaliação (Abrantes & Leal, 1991) não têm sido transpostos para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do ensino secundário. Entre as justificações encontradas pode referir-se a sujeição à pressão que a realização de exames nacionais causa nos professores, “no que respeita ao cumprimento dos conteúdos a tratar em cada período” (Varandas, 2000, p.230). A continuação do elemento

certificador, concretizado através da realização de exames nacionais com efeitos na progressão dos alunos no sistema educativo, é discutida ao nível dos educadores matemáticos e da mediatização social que é dada à matemática (Rosales, 1984; Guerra, 1995; Barbosa, 1996; Leal, 1997; Perrenoud, 2001; Méndez, 2001; Casanova, 2002).

A minha inquietude acerca dos processos, recursos, erros e dificuldades com que os alunos se confrontam no processo de aprendizagem e das consequências que as mesmas têm para o seu percurso escolar, levaram-me a reflectir sobre a avaliação em matemática no ensino secundário e a procurar aprofundar os meus conhecimentos acerca desta problemática. Ao questionar a minha prática, como professor do ensino secundário, levou-me a procurar explicações e a reflectir sobre a natureza dos problemas para compreender e mudar (Ponte, 2002a). A minha necessidade de mudança advém de incluir na avaliação os progressos que verifico nos alunos, ao nível das aprendizagens, a compreensão das dificuldades e dos raciocínios erróneos com que os alunos se confrontam e a valorização dos conhecimentos, capacidades e atitudes transversais que os alunos adquirem ao longo do seu percurso escolar.

O problema de investigação deste estudo, o tipo de processos desenvolvidos pelos alunos que podem contribuir para ajudá-los a ultrapassar dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos num contexto de actividade de investigação, resultou da tomada de consciência de que era necessário aprofundar o meu conhecimento sobre os dilemas que enfrento e, também, de compreender a sua natureza.

Em suma, esta investigação procura contribuir para um maior conhecimento da problemática da integração da avaliação e do currículo e poderá contribuir para aumentar o conhecimento dos seguintes aspectos do processo de ensino e aprendizagem:

- o papel das interacções estabelecidas dentro da sala de aula, em particular para a harmonização entre ensino, avaliação e aprendizagem;
- a relação entre as situações de trabalho com que os alunos se confrontam na sala de aula e a profundidade das aprendizagens desenvolvidas;
- o contributo da compreensão sobre os processos usados pelos alunos nas investigações matemáticas no conhecimento que os professores têm da sua profissão e da forma como poderão actuar, e na formação inicial ou contínua de professores;
- a mudança de práticas de avaliação, que decorrem da excessiva valorização de instrumentos tradicionais de recolha de resultados, nomeadamente testes e exames, em direcção à valorização dos processos e da diversidade;

- na procura de formas de valorizar o papel do aluno no processo de ensino e aprendizagem e na sua avaliação, desenvolvendo a sua autonomia e a sua capacidade investigativa.

Organização e apresentação da investigação

Este trabalho de investigação está organizado em nove capítulos. O primeiro e segundo capítulos dizem respeito à revisão de literatura. No primeiro é revista a problemática da avaliação das aprendizagens, a avaliação no ensino secundário e a avaliação formativa nos aspectos que do meu ponto de vista contribuem para a fundamentação teórica deste trabalho. No segundo capítulo é revista a pertinência das investigações matemáticas na sala de aula, através dos aspectos que favorecem o desenvolvimento da avaliação reguladora.

No terceiro capítulo são apresentadas as opções metodológicas que levaram à concretização deste trabalho. Para além do método de investigação, dos participantes e dos instrumentos de recolha de dados, inclui-se a discussão sobre o desenvolvimento deste trabalho num contexto de reflexão sobre a minha prática. No quarto capítulo são descritas as experiências de aprendizagem em que os alunos participantes estiveram envolvidos, nomeadamente as tarefas e a sua implementação, assim como o desenvolvimento da actividade de investigação.

Do quinto ao oitavo capítulo apresentam-se os estudos de caso. Neles são referidas as perspectivas dos alunos face ao ensino e à aprendizagem e os resultados da sua actividade de investigação. Os quatro capítulos sucedem-se, um por cada aluno, sendo que os alunos são apresentados por ordem alfabética dos nomes próprios que lhes foram atribuídos.

Finalmente, no nono capítulo é feita a apresentação e discussão dos resultados, procedendo-se a uma categorização dos processos de interpretação, dos processos de desenvolvimento, dos recursos, das funções do erro e da reflexão sobre as investigações matemáticas procurando-se, deste modo, responder às questões que orientaram este estudo. Ainda, no último capítulo, é realizada uma reflexão final sobre este trabalho de investigação e são incluídas recomendações no âmbito da investigação em educação matemática.

CAPÍTULO I

AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS

A avaliação no ensino secundário

O programa de Matemática – A é muito semelhante ao programa de Matemática de 1991 e ajustado em 1997. No entanto, há algumas alterações que quero salientar. Para começar, aparece um módulo inicial com a duração recomendada de três semanas, com dois objectivos principais: criar uma oportunidade de o professor detectar dificuldades nos alunos, para que, quando possível, se possam delinear estratégias de superação dessas dificuldades; fazer com que os alunos tomem consciência clara das responsabilidades que também lhes cabem no desenvolvimento das suas aprendizagens e tornar claro aos alunos que superar dificuldades exige estudo e esforço e os jovens devem entender bem o seu papel neste processo.

Para a concretização do módulo inicial é proposta uma estratégia de resolução de problemas nos temas de Números, Geometria e Álgebra que permita pôr em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, raciocínio matemático e análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação. Os cinco problemas sugeridos são: (1) Unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero encontramos sempre um paralelogramo? (2) Porque é que há 5 sólidos platónicos? (3) Estudo da possível semelhança entre as garrafas de água de uma dada marca de 33 cl, 50 cl, 75 cl e 1, 5l. (4) Como resolveu o matemático Pedro Nunes equações do primeiro e do segundo grau? Podemos identificar, nos seus escritos, o uso da fórmula resolvente ou pelo menos de alguns casos particulares? Que casos Pedro Nunes não considerou ou considerou impossíveis? e (5) Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?

Os autores do programa melhoraram a redacção das indicações metodológicas, clarificando e simplificando o que se lhes afigurou necessário. O programa foi organizado em temas, correspondendo, como já acontecia desde 1997 a um tema por período, Geometria, Funções e Estatística (no 10ºano). No entanto, o número de temas transversais aumentou: passou de cinco para seis. Os actuais temas transversais são: comunicação matemática, história da matemática, resolução de problemas e actividades de investigação, aplicações e modelação matemática, lógica e raciocínio matemático e tecnologia e matemática. Verificou-se o acréscimo do tema “comunicação matemática”

e alterações nas designações dos seguintes: de resolução de problemas para resolução de problemas e actividades de investigação; de modelação matemática para aplicações e modelação matemática.

No que diz respeito à avaliação, esta é entendida como parte integrante do processo de ensino aprendizagem:

[Avaliação]: Avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos. Estes dados devem ser utilizados tanto pelos professores como pelos estudantes; os professores deverão utilizá-los para ajudar os estudantes a adquirir conhecimentos profundos e ideias claras sobre os conteúdos matemáticos. (Ministério da Educação, 2001, p.13)

E é reforçado o seu carácter formativo, em particular, auto-formativo:

Pretende-se que a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem. (Ministério da Educação, 2001, p.13)

Ao nível dos instrumentos de recolha de dados é introduzido um novo instrumento de avaliação, o teste em duas fases:

Recomenda-se também a utilização de testes em duas fases que permitem o desenvolvimento da persistência na procura de soluções para situações novas, para além de contribuírem para uma atitude de reflexão sobre a aprendizagem. (Ministério da Educação, 2001, p.14)

No ponto que diz respeito às sugestões metodológicas gerais sobre avaliação, também os conceitos de interacção, reflexão e tarefas de investigação passaram a estar incluídos. Nas actividades de investigação, o professor fica a conhecer o que os alunos são capazes de fazer, podendo adaptar as suas práticas:

O professor pode ficar a conhecer o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação. Esses dados podem ser utilizados para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam, aos estudantes, oportunidade de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente. (Ministério da Educação, 2001, p.13)

O estabelecimento de interações permite o desenvolvimento de processos de trabalho que contribuem para a regulação das aprendizagens:

A realização dessas actividades em trabalho de grupo permite aos estudantes adquirir uma certa prática para enfrentar novos problemas ou ideias matemáticas, escrevendo e explicando claramente os seus resultados e comunicando as suas observações e soluções de forma clara, primeiro aos colegas em pequeno grupo, depois à turma e ao professor. A interacção com os outros estimula a aparição de novos problemas, de novas ideias e de descobertas adicionais. (Ministério da Educação, 2001, p.13)

A reflexão em conjunto com a interacção possibilita uma maior compreensão conceptual das capacidades ou dos conhecimentos desenvolvidos:

A interacção com os outros estimula a aparição de novos problemas, de novas ideias e de descobertas adicionais. Os estudantes deparam-se com formas diferentes da sua de resolver problemas e a compreensão conceptual é mais profunda e duradoura. (Ministério da Educação, 2001, p.13)

Os aspectos salientados parecem evidenciar uma grande alteração relativamente à avaliação das aprendizagens dos alunos, mas não é bem assim. Por exemplo, no programa ajustado em 1997 já existia a recomendação do uso de outros instrumentos de avaliação para além dos testes escritos, inclusive salienta-se que existem competências e capacidades que só poderão ser avaliadas se a utilização dos testes escritos for complementada com outras formas de avaliar:

O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que cerca de metade seja feita usando outros instrumentos de avaliação que não testes clássicos. Os testes escritos em si mesmo poderão ter aspectos muito positivos se a sua utilização for ponderada com outros elementos de avaliação. Só assim se poderão testar outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no ensino secundário. Em particular, recomendamos fortemente que em cada período um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática (sob a forma de resolução de problemas, demonstração, composição/reflexões, projectos, relatórios, notas e reflexões históricas, etc.) que reforce a importante componente da comunicação matemática (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou da participação na área-escola). No corpo do programa aparecem muitas referências que poderão propiciar este tipo de avaliação. (Ministério da Educação, 1997, p.13)

Também uma comparação, ao nível da legislação, permite-nos concluir que alterações não são muito marcantes. O Decreto-Lei nº 74/2004 de 26 de Março define os princípios orientadores da avaliação das aprendizagens referentes ao nível secundário de educação. O referido diploma assume o princípio da integração do currículo e da avaliação, reconhecendo a diferenciação ao nível dos cursos, as competências e as componentes práticas e experimentais do currículo:

A avaliação consiste no processo regulador das aprendizagens, orientador do percurso escolar e certificador das diversas aquisições realizadas pelos alunos. A avaliação tem por objecto a aferição de conhecimentos, competências e capacidades dos alunos e a verificação do grau de cumprimento dos objectivos globalmente fixados para o nível secundário de educação, bem como para os cursos e disciplinas nele integrados. (Ministério da Educação, 2004, p.1934)

Se estabelecer a comparação com o Despacho Normativo 338/93 as diferenças não são muito significativas. Também o diploma publicado em 1993 perspectivava a avaliação como elemento integrante da prática lectiva com os objectivos de estimular o sucesso educativo dos alunos, certificar os saberes adquiridos e promover a qualidade do sistema de ensino:

A avaliação dos alunos é um elemento integrante da prática educativa que permite a recolha sistemática de informações e a formulação de juízos para a tomada de decisões adequadas às necessidades dos alunos e do sistema educativo. (...) A avaliação dos alunos no ensino secundário visa prosseguir as seguintes finalidades: a) Estimular o sucesso educativo dos alunos; b) Certificar os saberes adquiridos; c) Promover a qualidade do sistema educativo. (...) A avaliação dos alunos do ensino secundário tem por objecto verificar o grau de cumprimento dos objectivos globalmente fixados para o ensino secundário, bem como para os cursos e disciplinas que integram este nível de ensino. (...) A avaliação incide sobre os conhecimentos e competências adquiridos, tendo ainda em conta os valores e atitudes desenvolvidos pelos alunos. (Ministério da Educação, 1993, p.5934)

Também ao nível das modalidades de avaliação não é possível encontrar diferenças, identificando-se em ambos os casos a avaliação formativa e a avaliação sumativa e, dentro da última, a avaliação sumativa externa e sumativa interna. Embora se possa referir o desaparecimento da avaliação aferida que em nada influenciava o percurso do aluno ou o seu sucesso:

A avaliação das aprendizagens compreende as modalidades de avaliação formativa e avaliação sumativa. A avaliação formativa é contínua e sistemática e tem função diagnóstica, permitindo ao professor, ao aluno, ao encarregado de educação e a outras pessoas ou entidades legalmente autorizadas obter informação sobre o desenvolvimento das aprendizagens, com vista ao ajustamento de processos e estratégias. A avaliação sumativa consiste na formulação de um juízo globalizante, tem como objectivos a classificação e a certificação e inclui: a) A avaliação sumativa interna, da responsabilidade dos professores e dos órgãos de gestão pedagógica da escola; b) A avaliação sumativa externa, da responsabilidade dos serviços centrais do Ministério da Educação, concretizada na realização de exames finais nacionais. (Ministério da Educação, 2004, p.1935)

No ensino secundário distinguem-se as modalidades de avaliação seguintes: a) Avaliação formativa; b) Avaliação sumativa; c) Avaliação aferida. As modalidades de avaliação referidas no número anterior devem harmonizar-se de modo a contribuir para a qualidade do sistema educativo e, designadamente, para o sucesso educativo dos alunos (...) A avaliação sumativa processa-se através das seguintes formas: a) Avaliação sumativa interna; b) Avaliação sumativa externa (...) A avaliação interna destina-se a informar o aluno e o seu encarregado de educação do estado de cumprimento dos objectivos curriculares e a fundamentar a tomada de decisões sobre o percurso escolar do aluno. A avaliação interna é da responsabilidade conjunta dos professores que integram o conselho de turma, devendo o seu resultado ser comunicado ao aluno e ao encarregado de educação pelo director de turma (...) A avaliação externa é da responsabilidade do Ministério da Educação e tem por objectivo contribuir para a homogeneidade nacional das classificações do ensino secundário, permitindo a conclusão deste nível de ensino e a determinação da respectiva classificação. (Ministério da Educação, 1993, p.5935)

Os programas de Matemática do ensino secundário têm sofrido algumas alterações ao nível das orientações metodológicas na última década (Ministério da Educação, 1991, 1997; Departamento do Ensino Secundário, 2002) mas, em termos legislativos, na avaliação das aprendizagens não se têm verificado alterações significativas. Este facto pode ser comprovado pelas comparações entre o Decreto – Lei nº 74/2004 e o Despacho Normativo nº 338/93. A subsistência deste problema, em particular a continuação de uma avaliação sumativa externa que é concretizada através da avaliação das aprendizagens dos alunos e com efeitos sobre a sua progressão no sistema educativo, provoca a falta de coerência interna no próprio processo de ensino e aprendizagem. Uma vez que ao alterarem-se os objectivos, as metodologias e os conteúdos de um currículo, a avaliação tem, inevitavelmente, de ser reformulada. É

imperioso que exista coerência entre objectivos, metodologias e avaliação (Abrantes & Leal, 1991), o que não se tem verificado. Ao nível dos objectivos, metodologias e dos conteúdos, os programas têm sofrido algumas alterações, como é o caso da nova redacção dos temas transversais ou da especificação das orientações metodológicas (Goldenberg, 1998), mas o sistema de avaliação ficou basicamente na mesma, a progressão do aluno está dependente da avaliação externa das aprendizagens através de exame.

A avaliação formativa

No ensino secundário a avaliação é geralmente tida entre duas lógicas: ao serviço da selecção e ao serviço das aprendizagens (Perrenoud, 1999). Cada uma delas serve propósitos diferentes, que podem estar ou não relacionados entre si.

Os resultados da avaliação das aprendizagens de um aluno destinam-se, em primeiro lugar, a informar o próprio aluno, o professor, os pais, a escola, a comunidade, a respeito do seu progresso nos diferentes domínios da aprendizagem. Este papel informativo pode auxiliar a tomada de decisões, em especial por parte do aluno e do professor, envolvendo eventualmente a modificação ou o ajustamento do modo de estudar (do aluno) ou de organizar o ensino (do Professor) (Ponte et al., 1997). Esta é a lógica da avaliação formativa, que tem o propósito de fazer pontos da situação relativamente ao progresso do aluno face aos vários tipos de objectivos do currículo (Shepard, 2001), permitindo ao professor introduzir as necessárias correcções ou inflexões na sua estratégia de acção (Rosales, 1984). Esta concepção de avaliação surgiu na década de 60. A avaliação deixa de ser considerada uma actividade formal e começa a ser encarada como uma actividade reguladora, processual, dirigindo-se fundamentalmente para a tomada de decisão, não só respeitante ao processo de aprendizagem do aluno, como também ao processo de ensino do professor (Barreira, 2002; Perrenoud, 1988; Santos, 2002; Webb & Coxford, 1993).

Já por seu lado, a avaliação sumativa, cujos resultados são expressos num valor quantitativo, no ensino secundário, é usada em termos escolares para decidir se o aluno progride (ou não) para o ano seguinte, para certificar as aprendizagens atingidas no ensino secundário ou para possibilitar o seu ingresso no ensino superior.

É perante esta dupla função, a pedagógica e a de controlo e pressão, que entram em choque os vários intervenientes do sistema educativo (Rosales, 1984). Os professores porque pretendem desenvolver determinados objectivos, capacidades e

formas de trabalho, os alunos porque estão sujeitos à pressão de instrumentos como os exames nacionais e os testes escritos. A comunidade de educação matemática porque, durante as últimas décadas, a educação matemática desenvolveu-se consideravelmente no domínio dos ideais e objectivos, na teoria e na prática, enquanto os conceitos e práticas de avaliação não registaram o mesmo desenvolvimento (Fernandes, 1993; Niss, 1993; Perrenoud, 1986). A sociedade em geral devido aos fracos resultados obtidos pelos alunos portugueses nos exames nacionais, especialmente nas questões que testam a aplicação a situações novas, a destreza de cálculo, a resolução de problemas e/ou a interpretação de resultados, a utilização da calculadora e as conexões entre diferentes temas (GAVE, 2002) e nos estudos internacionais (Ramalho, 2001).

Centrando-me na avaliação reguladora, que possibilita tarefas de avaliação que fornecem ao aluno informação para o ajudar na reflexão e auto-regulação relativamente ao seu próprio processo de aprendizagem (Jorro, 2000; Nunziati, 1990; Perrenoud, 1998; Vial, 2001), contextualizo as diferentes perspectivas e possibilidades desta modalidade no ensino secundário.

Avaliação formativa, termos e conceitos

A expressão avaliação formativa foi usada pela primeira vez por Scriven (1967). Os processos de avaliação formativa destinavam-se a permitir ajustamentos sucessivos durante o desenvolvimento e a experimentação de um novo curriculum, manual ou método de ensino. Bloom et al. (1971) utilizou a expressão, avaliação formativa, para descrever os processos utilizados pelo professor para adaptar a sua acção pedagógica em função dos progressos e dos problemas de aprendizagem observados nos alunos. Mais tarde, e deslocando o foco para o aluno, Cardinet (1986) sugere que a avaliação formativa deve ter como finalidade permitir uma tomada de consciência, pelo indivíduo, daquilo que distingue a sua maneira de agir de outras maneiras possíveis, e da lógica subjacente ao seu comportamento (auto-regulação).

Numa perspectiva mais recente, Fernandes et al. (1994) destacam as seguintes características como caracterizadoras da avaliação formativa: é interna ao processo de ensino aprendizagem; interessa-se mais pelos processos do que pelos resultados; torna o aluno protagonista da sua aprendizagem; permite diferenciar o ensino; serve ao professor para, através das informações colhidas, reorientar a sua actividade; serve ao aluno para auto-regular as suas aprendizagens, consciencializando-o de que a

aprendizagem não é um produto de consumo a construir, e de que ele próprio tem um papel fundamental nessa construção.

Neste contexto de avaliação reguladora, é necessário que a avaliação seja entendida como parte integrante do processo de ensino aprendizagem (Abrantes & Leal, 1991). É importante conhecer o papel do professor, os alunos e os seus mecanismos de regulação, as interacções estabelecidas pelo aluno que o levam a reorientar a sua actividade com vista à concretização da tarefa, uma vez que aumentando este conhecimento é possível promover a realização do aluno em Matemática (Black & Wiliam, 1998; Bonniol, 1989; César & Torres, 1998; Hadji, 1994; Jorro, 2000).

No processo de ensino e aprendizagem, usando a terminologia adoptada por Allal (1986), podemos distinguir diferentes modalidades de avaliação, que para Allal têm sempre uma função de regulação. No caso da avaliação formativa, a regulação assume-se como forma “de assegurar que os meios de formação propostos pelo sistema estejam adaptados às características dos alunos” (Allal, 1986, p.177). Relativamente às modalidades de avaliação formativa, Allal distingue: (1) avaliação pontual, regulação retroactiva, que acontece quando “as dificuldades encontradas pelo aluno não são detectadas durante a aprendizagem” (1986, p.189); (2) avaliação contínua, regulação interactiva, que permite “identificar as dificuldades logo que aparecem, diagnosticar os factores que estão na origem das dificuldades de cada aluno e formular, de forma consequente, adaptações individualizadas das actividades pedagógicas” (1986, p.191) e (3) regulação proactiva (1988), que aparece no momento de introdução de novas situações e resulta no ajuste das tarefas e das situações à diversidade dos alunos.

Já nas normas do NCTM (1991), a avaliação formativa é tida como um processo no qual o professor tenta compreender os significados que os alunos atribuem às ideias que transmitem (nos diálogos entre professores e alunos durante o processo de ensino e aprendizagem). Também para Webb & Briars (1990), a avaliação formativa deve ser entendida como uma interacção entre professor e alunos, com o professor continuamente a procurar compreender o que o aluno pode fazer e como é que ele é capaz de o fazer e assim usar esta informação para guiar o ensino.

George & Cowan (1999) definem avaliação formativa como a intenção de identificar a necessidade e a capacidade de melhorar. Segundo eles, esta definição implica que a avaliação formativa se traduza em comentários do professor para o aluno que se reflectem na melhoria dos trabalhos seguintes. Neste caso, esta efectua-se através

de uma listagem de sugestões e comentários para a acção e o desenvolvimento no processo de ensino e aprendizagem.

Para Brun (1986), os professores no seu dia a dia confrontam-se permanentemente com o problema da adaptação dos conteúdos de ensino ao nível de compreensão dos alunos e têm de tomar decisões sobre esta adaptação, embora o quadro geral lhes seja dado pelas metodologias. Entende, assim, a avaliação formativa como uma intervenção para fazer evoluir.

No caso de Cortesão (2002), e acerca do ensino básico, a avaliação formativa é uma forma de avaliação em que a preocupação central reside em colher dados para a reorientação do processo de ensino aprendizagem (na sala de aula ou no processo de desenvolvimento de um currículo). Mas, no ensino secundário, existem condicionalismos de diferentes ordens que impedem o funcionamento desta recolha de dados sistemática (Perrenoud, 1988). Por exemplo, a existência de exames no final do ciclo submete os professores à pressão de cumprimento dos conteúdos num determinado espaço de tempo e de forma aproximada ao que é solicitado no exame:

A pressão a que [as professoras] estão submetidas, quer pelo Ministério da Educação, quer pela comunidade em geral, no que respeita ao cumprimento dos conteúdos a tratar em cada período, condicionou algumas das suas opções. Este aspecto foi particularmente observado na escolha das tarefas que serviram de suporte aos diversos modos de avaliação experimentados. (Varandas, 2000, p.230)

Para que os mecanismos de avaliação reguladora funcionem é necessário que o professor e o aluno adoptem atitudes diferentes em relação ao processo de ensino e aprendizagem. Assim, pensar na avaliação reguladora passou a implicar a procura de certas atitudes de professores e alunos no decurso de um processo de ensino e aprendizagem.

Para levar à prática de uma avaliação reguladora, seja de que tipo for, o professor deve observar metodicamente os alunos, para compreender melhor os seus funcionamentos, e ajustar de maneira mais sistemática e individualizada as suas intervenções e as situações didácticas, de forma a rentabilizar as aprendizagens (Perrenoud, 1999). Para que este ajuste do processo de ensino e aprendizagem seja concretizado na sua plenitude também é necessário conhecer as interacções estabelecidas no seu seio. Sem as referidas interacções não é possível o aluno obter o feedback necessário a uma regulação efectiva das suas aprendizagens.

O papel da regulação e da auto-avaliação

Rafael (1998) refere-se à avaliação formativa como sendo uma modalidade de avaliação usada durante o processo de ensino e aprendizagem que é orientada para a regulação na assumpção de que todos os alunos aprendem, embora de uma forma diferenciada. A mesma autora, acrescenta que na sua perspectiva de avaliação, com a avaliação contínua do trabalho dos alunos não só se facilita a sua aprendizagem em Matemática mas também se integra a sua confiança no que compreendem e podem comunicar. Defende, ainda, que a avaliação contínua permite que os alunos reflectam sobre o seu próprio progresso, compreendam o que sabem e podem fazer, confiem naquilo que aprenderam e possam prever o que precisam ainda aprender. Neste ponto de vista, o desenvolvimento de uma atitude de auto-avaliação contribui para o processo de regulação das aprendizagens (Santos, 2002).

Se a regulação for entendida como um processo deliberado e intencional que visa controlar os processos de aprendizagem, para que se possa consolidar, desenvolver ou redireccionar essa mesma aprendizagem então a regulação das aprendizagens existe sempre, em maior ou menor grau, consoante é mais ou menos tradicional a pedagogia usada pelo professor. As questões, as respostas, os erros e as tentativas dos alunos são usados pelo professor para obter conhecimento sobre as resistências e as dificuldades em seguir o ritmo ou em assimilar um determinado conteúdo (Äbrecht, 1991; Perrenoud, 1999). No entanto, um processo de avaliação formativa coloca o foco principal na regulação das aprendizagens do aluno (Lemos et al., 1992), nos processos que usa, sendo esta uma fonte de informação para o professor e para o aluno:

A avaliação formativa está portanto centrada essencial, directa e imediatamente sobre a gestão das aprendizagens dos alunos (pelo professor e pelos interessados). (Bain, 1988, p.24)

Na auto-avaliação, o aluno desenvolverá um mecanismo de interacção crítica consigo mesmo com vista a atingir o sucesso, aquilo a que Perrenoud (1999) chama conjunto de operações metacognitivas do sujeito e das suas interacções com o meio que modificam os seus processos de aprendizagem no sentido de um objectivo de domínio. O mesmo autor distingue dois tipos de regulação dos processos de aprendizagem, a directa e a indirecta:

A regulação directa dos processos de aprendizagem, que passa por uma intervenção nos funcionamentos intelectuais do aluno centrado em uma tarefa, de regulação indirecta, que age sobre as condições de aprendizagem: motivação, participação, implicação no trabalho, ambiente, estruturação da tarefa e da situação didáctica. (p.80)

O professor usa os dois tipos de regulação com o objectivo de desencadear no aluno o auto-desenvolvimento, a auto-aprendizagem e a auto-regulação. Sem estes mecanismos os alunos não atingirão os seus intentos de objectivo de domínio. Mas, para que isto aconteça é necessário que exista um objectivo de interesse para o aluno e que tenha significado para ele. Assim, a intervenção educativa tem de ser capaz de modificar o meio do aluno e de provocar interacção com ele, com vista ao desenvolvimento de um mecanismo de procura do saber e de lhe dar sentido, o que Delannoy (1997) chama um desejo de saber e a decisão de aprender.

Para a regulação das aprendizagens também contribui o desenvolvimento de práticas e de instrumentos de auto-avaliação e de apropriação dos critérios de avaliação, como é referido por Nunziati (1990). A auto-avaliação é um processo espontâneo que leva o aluno a questionar em dado momento o trabalho realizado: “fala-se de auto-controle, lançamento de um olhar crítico sobre o que foi feito e como o foi, recorrendo ao seu próprio sistema de pilotagem” (Nunziati, 1990, p.53). A auto-avaliação é um processo de auto-regulação que contribui para a concretização de uma verdadeira avaliação formativa (Santos, 2002).

Nas mais recentes formas de avaliação, negociada e auto-avaliação, o aluno tem um papel na discussão e negociação dos termos e efeitos dessa avaliação (Gipps, 1999). Quando este papel lhes é efectivamente atribuído verifica-se um aumento do envolvimento dos alunos no processo de avaliação, de modo a gerirem e a reflectirem sobre o seu desempenho, tornando-se assim reguladores da sua própria aprendizagem (Broadfoot, 1996; Wittrock & Baker, 1991).

No entanto, existem constrangimentos ao desenvolvimento de uma atitude de auto-avaliação. Broadfoot et al. (1988), acerca de um estudo desenvolvido em Inglaterra, que envolvia a auto-avaliação dos alunos do ensino secundário apontam como resultados: (i) a percepção dos alunos relativamente às expectativas do professor, a sua visão do que era socialmente aceitável e a preocupação em não perder a sua reputação afectavam a sua auto-avaliação; (ii) a existência de diferenças de género entre grupos étnicos na abordagem ao processo de auto-avaliação e negociação com os

professores; (iii) que os rapazes têm uma maior tendência para desafiar a avaliação do professor e acatar a opinião final da turma, e as raparigas tendem a envolver-se na discussão e na negociação com o professor de uma forma mais profunda.

Por outro lado, para alguns alunos os mecanismos de auto-regulação não funcionam em virtude da atribuição de significado se restringir apenas ao contexto escolar. Vários autores referem que o sentido dos saberes e do trabalho escolar não se encontra somente no plano didáctico e que tudo poderia ser diferente se as aprendizagens tivessem um sentido menos escolar (Bernardim, 1997; Perrenoud, 1996; Rochex, 1995; Vellas, 1996). O problema da atribuição de significado ao que se aprende pode ser um dos justificativos para o insucesso dos alunos no sistema escolar actual.

Perrenoud (1999) destaca outros obstáculos a uma regulação efectiva das aprendizagens: o currículo formal enfatiza mais os conteúdos a ensinar, as noções a estudar e a trabalhar do que os conhecimentos propriamente ditos; a noção de aprendizagem é abstracta, não é possível reconstruir todos os processos usados pelo aluno a partir do que ele diz ou faz; a falta de tempo para desenvolver aprendizagens; e a prioridade dada, pela maioria dos professores, à regulação das tarefas e ao controle do trabalho.

Perante os factos apresentados, o processo de regulação das aprendizagens e de auto-avaliação deve passar pela procura da melhoria dos factores que influenciam o desenvolvimento e a aprendizagem do aluno. A auto-reflexão deve ajudar o aluno a progredir e isso pode ser feito de muitas formas: explicar de outra forma, modificar a tarefa, reforçar os aspectos positivos, desdramatizar a situação, modificar os tempos estabelecidos, alterar os objectivos em função do trabalho realizado e a responsabilização do aluno. Para que esta intervenção seja levada a “bom porto” é necessário que o professor adopte uma estratégia de questionamento das causas, das dificuldades, dos pré-requisitos, do significado dos erros, das interacções estabelecidas e das condições de vida e trabalho na escola e fora dela (Oliveira et al., 1999a).

Noutra perspectiva, para Sadler (1998), os professores devem partilhar com os alunos os seus conhecimentos, atitudes, estratégias, técnicas, normas e critérios e experiências de feedback acerca da avaliação, de modo a que estes os aprendam:

Se as manifestações de feedback do professor para com o aluno têm como função incentivar a auto-avaliação e a auto-regulação, parte do contributo do professor para o acto avaliativo deverá fazer parte do currículo, e não ser apenas um acessório casual ou inconsequente. (p.82)

O que acontece algumas vezes é que os professores optam por usar uma versão degradada de avaliação formativa (Candeias, 1993). Usam os dados recolhidos da avaliação sumativa para a regulação das aprendizagens. Segundo Barreira (2002), as relações que os professores estabelecem entre a avaliação formativa e a avaliação sumativa na prática educativa, leva-os, pela falta de condições existentes nas escolas e pelas dificuldades e resistências sentidas na prática da avaliação contínua de regulação interactiva, a optarem, na maior partes das situações, por uma estratégia de avaliação formativa pontual de regulação retroactiva que se confunde com a utilização que os professores fazem normalmente da avaliação sumativa. Para Perrenoud (2001) o objectivo do professor deve ser o desenvolvimento de competências de auto-regulação do aluno, uma vez que o aluno aprende quando, internamente, percebe e interpreta as informação do meio, interagindo com ele fisicamente e socialmente.

As interações estabelecidas pelo aluno e a reorientação da sua actividade

Para a concretização de uma regulação das aprendizagens eficaz é necessário que o aluno e o professor se encontrem em sintonia relativamente aos objectivos a atingir. O aluno deve perceber claramente o que o professor pretende atingir com determinada tarefa e o professor deve ajudar o aluno com o feedback adequado à situação (Hadji, 1994; Black & Wiliam, 1998; Perrenoud, 1999). Muitas vezes o feedback não vem do professor, poderá vir de outros alunos ou até do manual ou de outro recurso disponível no momento. Na diversidade de situações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem, a negociação de significados e a mediação (Wertsch, 1991) é um factor a ter em conta.

O aluno quando chega à escola, já traz consigo saberes e competências que adquiriu na sua vida quotidiana e nos contactos sociais que estabeleceu. Quando o aluno se apropria de um conhecimento, há todo um conjunto de experiências e conceitos prévios que lhe permitem interpretar e dar sentido àquela actividade, o que implica um trabalho de descontextualização e recontextualização. Numa situação particular, o aluno em comunicação com os outros alunos ou com o professor (Gipps, 1999; Shepard, 2000), encontra-se numa situação de confronto que o leva a explicar, justificar, argumentar, expor ideias, dar ou receber informações para tomar decisões, planear ou partilhar o trabalho e obter recursos. Esta interacção ocorre no processo de ensino e

aprendizagem e funciona como um favorecimento à regulação das aprendizagens (César, 1997).

Vários têm sido os investigadores que se dedicam ao estudo destas interações, quer se trate da influência de interações sociais no desenvolvimento cognitivo (Doise & Mugny, 1981; Gilly, 1990; citados em César, 1997), quer se trate da influência positiva que as interações trazem para a aprendizagem da matemática (Branco, Angelino & César, 1995; César, 1994, 1995, 1997).

O desempenho do aluno em aula é susceptível de ser influenciado por diferentes factores, por exemplo a situação, a tarefa, os instrumentos, os actores (professores e alunos), o estado social dos actores (César & Torres, 1998). Esta análise também nos fornece informação sobre o estabelecimento de conjecturas, selecção de estratégias, procura de argumentações e comparação e negociação de resultados. A análise destes factores trás vantagens para o sucesso do aluno no processo de ensino e aprendizagem, pois o conhecimento e a identificação de interações semelhantes promove a socialização dos alunos, a atitude positiva face à matemática, a apreensão de conhecimentos e a aquisição de capacidades (César & Torres, 1998), desenvolvendo assim as suas atitudes de auto-regulação e auto-avaliação.

Crawford & Adler (1996), que efectuaram estudos com alunos prestes a entrarem para a universidade, realçam o facto de existir uma relação estrutural entre as representações sociais que os alunos têm da Matemática e o modo como estudam a disciplina. É necessário modificar o tipo de representação social, ou seja, desenvolver práticas de sala de aula que ajudem os alunos a evoluir para concepções mais dinâmicas, inovadoras e positivas (Serrazina & Ponte, 1999). Para Davis (1992), o factor cooperação tem um papel fundamental quando se pretendem mudar as práticas, e concepções, o que é válido, segundo a perspectiva do trabalho de César et al. (1999), ao nível das interações com professores e alunos.

Perante esta diversidade de influências é natural que o desempenho dos alunos não seja o mesmo em todas as situações. Em particular, um aluno saber resolver uma determinada tarefa, inserida numa dada situação e contexto, não garante que ele seja capaz de a realizar, com o mesmo grau de sucesso, quando essa tarefa é apresentada em situações e contextos diferentes (Branco, Angelino & César, 1995). Em especial, como é referido por vários investigadores (Rogoff, 1982; Wistedt, 1994), quando se espera que os alunos transfiram o que aprenderam na escola para actividades do seu dia-a-dia somos surpreendidos com o fracasso dessa transferência. O problema da transferência

das aprendizagens é apontado como sendo de razão social (Valero, 2002) e que, em contexto real, as interacções nem sempre são do mesmo tipo das verificadas na escola e quando o são a situação altera-se.

No que diz respeito aos actores, a actividade desenvolvida pelo aluno é influenciada pelos outros que interagem com ele (Wertsch, 1991). Por exemplo, Banco, Angelino & César (1995) verificaram que quando os alunos trabalham em díades são mais capazes de adoptar e fazer evoluir as suas estratégias, de acordo com os problemas, o que os leva a ter mais sucesso nos seus desempenhos. A interacção entre pares, neste caso entre alunos, é essencial para que haja cooperação, capacidade de argumentação, espírito crítico (César et al., 2002), confronto de opiniões, necessidade de argumentar e justificar, aceitação de críticas, etc. É neste processo que muitos alunos compreendem o significado das investigações e das estratégias que podem usar para as desenvolver (Bonniol, 1989). Explicar e perceber diferentes pontos de vista facilitam o desenvolvimento de explicações e argumentações (Laborde, 1994). Para Bishop e Goffree (1986) a aprendizagem não resulta somente da actividade mas também da reflexão sobre a actividade. Por isso, a explicação a outro ou a reflexão final são elementos fundamentais na rentabilização de todas as aprendizagens desenvolvidas no decurso do processo de investigação.

A interacção entre o professor e os alunos tem um papel importante na compreensão das conjecturas formuladas e na emergência de novas conjecturas (Ponte et al., 1998a). A interacção entre professor e alunos pode ocorrer em duas situações distintas: o professor interage com os alunos à medida que se vai inteirando do nível de concretização do trabalho ou um aluno chama o professor para o questionar sobre um aspecto da sua investigação. No primeiro caso, o professor vai alertando os alunos para aspectos ainda não explorados, estimulando-os a justificar as conjecturas efectuadas. No outro caso, o aluno coloca o professor perante um suposto resultado e procura no professor a resposta para as suas dificuldades (Abrecht, 1991; Brocardo, 2002; Rocha, 2002a; Segurado, 1997).

Taylor et al. (1997) desenvolveram a propósito das interacções, o conceito de discurso aberto em que a comunicação entre professor e aluno é orientada no sentido da compreensão e respeito pelas perspectivas de terceiros:

O discurso aberto permite aos alunos (1) discutir com o professor a natureza das actividades de aprendizagem, (2) participar na

determinação dos critérios de avaliação, comprometendo-se na auto-avaliação e na hetero-avaliação, (3) formular, cooperativamente com os colegas, questões de natureza aberta (4) participar na reconstrução das normas sociais vigentes na aula. (p.295)

Pardala (1997) destaca mais alguns dos aspectos que podem tornar a intervenção do professor num factor importante para o sucesso da actividade do aluno: (1) se o tempo que o professor estabeleceu para a concretização da tarefa é insuficiente existe a tendência para apressar o aluno quando este está a pensar; (2) um erro cometido pelo aluno, que impede de continuar ou afecta o seu raciocínio comprometendo toda a tarefa, necessita da intervenção do professor; (3) os alunos têm um entendimento diferente sobre a tarefa, ou sobre os conteúdos e é necessária uma intervenção clara que possibilite a tomada de decisão sobre o caminho a seguir; (4) as dúvidas que surgem e que são transformadas em perguntas, durante a realização de uma actividade, funcionam como regulação das aprendizagens.

Também para Ponte et al. (1998a), o professor é um importante actor nas interacções estabelecidas no seio da sala de aula:

Fica a cargo do seu senso matemático e educacional decidir o que é importante em cada momento, escutando muito, mostrando flexibilidade, e tentando descobrir qual poderá ser o movimento seguinte mais adequado. (p.14)

A importância do professor destaca-se quando é ele que controla os outros factores susceptíveis de influenciar as interacções encontradas na aula. Ao professor cabe: (a) seleccionar, adaptar ou construir as tarefas de investigação a propor aos alunos; (b) pensar na estrutura das aulas, no modo de trabalho dos alunos e a gestão do tempo; e (c) utilizar ou não materiais de apoio e suporte ao desenvolvimento da tarefa.

No entanto, a avaliação reguladora poderá ficar comprometida se o professor não for capaz de conduzir a aula com uma dinâmica muito diferente da aula usual, sem orientar os alunos de forma excessiva ou insuficiente (Mason, 1991). Apesar das alterações verificadas nas práticas, como refere Fernandes: “os métodos de ensino continuam a ser genericamente os mesmos de há décadas atrás” (1996, p.36), o que pode ser justificado pelo enquadramento numa matriz absolutista das concepções de muitos professores sobre a Matemática. Outros autores justificam também que os professores nas suas práticas, “na sua visão do aluno, da aprendizagem e da avaliação,

mostram-se pouco informados pelas perspectivas hoje dominantes em educação” (Ponte et al., 1998b, p.265).

Um dos processos que parece ser dos mais eficazes para operar modificações duradouras na prática dos professores, que incentivariam aulas diferentes para os alunos, é o trabalho destes em equipas motivadoras (César & Oliveira, 1999) e com bom ambiente de trabalho, onde se desenvolvem esquemas de cooperação, reflexão e partilha de saberes.

Integração da avaliação formativa no processo de ensino e aprendizagem

Existe a evidência de que os alunos têm fracos resultados em Matemática devido à falta de coerência entre o que são as práticas lectivas em situação de aula e as questões colocadas nos testes de avaliação externa ou internacional (Pérez, 1995; Barbosa, 1996; Alves, 2004). Esta evidência é dada por diferentes estudos internacionais e nacionais. É o caso do PISA e do Matemática 2001. No primeiro estudo Internacional PISA, divulgado em Dezembro de 2001, os alunos portugueses ficaram em 24º lugar, entre 27 países da OCDE, na parte da Matemática, com um média de 454 pontos (Ramalho, 2001). A amostra de alunos que participou no estudo foi sujeita a uma escala que mede a capacidade de os alunos reconhecerem e interpretarem problemas matemáticos encontrados no mundo em que vivem, de traduzirem esses problemas para um contexto matemático, de usarem o conhecimento e os procedimentos matemáticos na resolução de problemas, de interpretarem os resultados em termos do problema original, de reflectirem sobre os métodos aplicados e formularem e comunicarem os resultados (Ramalho, 2001). Estes resultados, no ensino secundário, estão de acordo com o relatório Matemática 2001 (APM, 1998), onde se afirma que as orientações curriculares emanadas pelos programas não têm expressão efectiva no dia a dia escolar. No que diz respeito às situações de trabalho na aula, e ao nível do ensino secundário, cerca de 93% dos professores usam os exercícios sempre ou em muitas aulas. A exposição pelo professor também é usada por cerca de 81% dos professores. A resolução de problemas, o trabalho com situações da realidade e actividades de exploração são referidos, respectivamente, por 67%, 26% e 14% dos professores do secundário (APM, 1998, p.31).

Ao nível dos educadores matemáticos, para Ponte (2002b) a grande deficiência do ensino da Matemática em Portugal está no facto de não promover, como seria necessário, a capacidade de pensar em termos matemáticos e de usar as ideias

matemáticas em contextos diversos. E, segundo o mesmo autor, é necessário que os alunos desenvolvam a compreensão e a apropriação crítica de conceitos matemáticos:

Não é através da memorização e mecanização de definições e procedimentos que os alunos poderão atingir os principais objectivos visados por esta disciplina. Pelo contrário, será a compreensão e a apropriação crítica de conceitos e ideias matemáticas pelos alunos que terá de ser a estratégia fundamental (Ponte, 2002b, p.24)

As práticas nas salas de aula não são coerentes com as solicitadas no teste do PISA e o mesmo teste não faz parte do processo de aprendizagem. Em vez desta situação indesejável, é de todo preferível que as tarefas de avaliação se tornem o máximo possível coincidente com as tarefas de aprendizagem (Fernandes, 1993). É importante contribuir para os princípios da coerência e da integração (Leal, 1992). O que é avaliado deve estar de acordo com as actividades na sala de aula e a avaliação deve ser aplicada de forma natural e integrada no processo de ensino e aprendizagem. Para Santos (2003b) as grandes linhas orientadoras para a avaliação das aprendizagens, na Matemática, expressas nos diversos documentos com especial relevância curricular em Portugal vão na linha das que se podem encontrar a nível internacional.

Relativamente às práticas de avaliação, o relatório Matemática 2001 (APM, 1998) refere que é no ensino secundário que se verifica a maior importância dada aos testes escritos, 94% dos professores utilizam-nos sempre como instrumento de recolha de dados para avaliação das aprendizagens. Ora, não é de estranhar que o mesmo aconteça, uma vez que os alunos do ensino secundário são sujeitos a uma avaliação externa no final do 12º ano, que a Matemática tem um papel preponderante na selecção dos alunos para o ingresso ao ensino superior, e que os Matemáticos apontam os testes escritos como um excelente auxiliar de aprendizagem (Buescu, 2003). A pressão da avaliação sumativa sobre os alunos provoca uma contradição entre os objectivos e os meios no sistema de ensino e aprendizagem:

Um primeiro sintoma é o de estes desvalorizarem tudo aquilo que não se identifica com as características de um saber testável numa prova. Por exemplo, são bem possível o desinteresse, e porventura a recusa, no desenvolvimento de trabalhos realizados em grupo, de tarefas que exigem o seu desenvolvimento ao longo do tempo e uma maior autonomia e responsabilidade por parte dos alunos. Estas provas de avaliação externa correm o risco de assumir um papel de tal destaque que “surgem aos olhos dos alunos (e mesmo talvez dos

professores) como a verdadeira razão para aprender Matemática” (Hilton, 1981, p.79 in Romberg, 1987). (Leal, 1997, p.5)

Vários documentos nacionais e internacionais referem a necessidade de diversificar as formas e os instrumentos de avaliação das aprendizagens dos alunos (Cockcroft, 1982; NCTM, 1991, 1994, 1999, 2000; APM, 1998). Ao nível dos instrumentos de avaliação existem investigações em Portugal que se têm dedicado a esta temática. A observação a partir de uma grelha de registo, o teste em duas fases, o relatório escrito em grupo na sala de aula, o relatório escrito individualmente e fora da sala de aula e a apresentação oral foram instrumentos estudados por Leal (1992). Varandas (2000) estudou o trabalho e relatório escrito individualmente e na sala de aula, o relatório escrito individualmente e fora da sala de aula e a apresentação oral. Menino (2004) analisa a utilização de diversos instrumentos de avaliação em Matemática, desenvolvidos num contexto de trabalho colaborativo com professores de Matemática do 2º ciclo do ensino básico e o investigador. Outros investigadores, Graça (1995), Martins (1996) e Rafael (1998) procuraram compreender e conhecer o que faziam os professores de matemática e as suas concepções sem qualquer pretensão de intervir nas realidades em estudo.

Mas, o conhecimento sobre os problemas da avaliação das aprendizagens dos alunos está longe de estar resolvido, num contexto de tarefas de investigação:

Por resolver continuam as questões da gestão curricular – como articular este tipo de tarefas no currículo – e na avaliação – não só o modo de avaliar o desempenho dos alunos mas também o modo de integrar os elementos referentes a estas tarefas num sistema global, coerente, de avaliação. (Ponte et al., 2002c, p.4)

O conhecimento sobre o que os alunos pensam e que estratégias utilizam nos procedimentos avaliativos é outra área em que, pela sua importância, é premente dar-se atenção. (Santos, 2003a, p.25)

O relatório Matemática 2001 (APM, 1998) recomenda o seguinte:

Tendo em atenção que os objectivos curriculares incluem competência nos domínios dos conhecimentos, capacidades, atitudes e valores, os professores devem procurar encontrar formas diversificadas de recolha de dados para a avaliação dos alunos, recorrendo, para além dos testes, a relatórios e outros trabalhos e a desempenhos orais dos alunos e procurar formas práticas e eficazes de registo desses dados de

forma a viabilizar uma avaliação formativa mais sistemática e a sua integração na avaliação sumativa. (APM; 1998, p.42)

Uma forma emergente da diversificação das formas de trabalho e das formas de avaliação são as tarefas de investigação:

O contexto do desenvolvimento de tarefas de investigação foi considerado como adequado à utilização de formas alternativas de avaliação, como sugerido nos novos programas, nomeadamente a realização de relatórios. (Relatório final do projecto MPT, 1999, p.9)

As actividades de investigação proporcionam oportunidades para o debate e a reflexão e promovem o conhecimento de assuntos gerais (Ponte, 2001). Mas, à semelhança do que acontece com a resolução de problemas, a dificuldade está no desenvolvimento do respectivo processo de avaliação, em virtude de ter sido dada, até agora, pouca atenção às tarefas de aprendizagem que possam constituir simultaneamente tarefas de avaliação. Muitas vezes o foco da instrução é o processo e o foco da avaliação é apenas o resultado (Graça, 1994).

Das várias funções da avaliação em resolução de problemas, Silver e Kilpatrick (1994) nomearam duas delas como pouco referidas: (1) a avaliação como reguladora do processo de ensino; (2) a avaliação focando o que de facto valoriza. Estes autores referiam-se ao facto de se fazer a avaliação da resolução de problemas com base no pressuposto de que a comunicação é um aspecto essencial e que avaliar a resolução de problemas é uma tarefa semelhante à de avaliar uma composição. Mas não é assim, nem na resolução de problemas nem nas investigações matemáticas. No desenvolvimento de uma actividade de investigação, Varandas (2000) salienta que o professor tem de equacionar a forma de avaliação apropriada para atingir dois objectivos: (a) avaliar os alunos de uma forma justa e (b) comunicar-lhes os aspectos mais valorizados do seu trabalho. Na concretização deste objectivos é preciso recolher dados. Para recolher os dados necessários à avaliação de uma actividade de investigação podemos utilizar vários instrumentos de recolha de dados (Leal, 1992; Varandas, 2000). Destaco os que se evidenciam neste estudo: a observação na fase de exploração e o relatório do trabalho desenvolvido.

A observação dos alunos durante o processo de actividade de investigação constitui um importante instrumento de avaliação em aula, quando se tratam de aulas diferentes, aulas em que o aluno está envolvido a fazer matemática. Beyer (1993) refere

que alguma avaliação vem de instrumentos, como por exemplo, dos testes escritos, mas a maior parte resulta de ideias obtidas das interações e das observações do trabalho diário na aula. Através da observação do trabalho dos alunos podemos encontrar os processos de raciocínio usados por eles que dificilmente seriam detectados em actividades escritas (NCTM, 1999). Também, segundo Ponte et al. (1997) a observação permite avaliar a evolução do aluno relativamente a muitos dos objectivos do currículo. A utilização da observação dos alunos feita a partir de uma grelha de registo levou Leal (1992) a identificar as dificuldades da sua aplicação. A autora identificou: a solicitação por parte dos alunos; a atenção dirigida à observação; a desconcentração nas respostas dadas às questões colocadas pelos alunos; o excesso de tempo para realizar a tarefa e o registo atempado da informação recolhida.

O relatório sobre o trabalho desenvolvido é um elemento importante de avaliação e também de aprendizagem. Os alunos ao produzirem um trabalho escrito vivem o processo de descrever, analisar e criticar uma dada situação ou actividade, que é tão importante como a própria investigação, pois à semelhança do que acontece com o processo de investigação, a redacção do relatório poderá ser faseada:

Depois de articular oralmente os seus argumentos e ideias é importante que o aluno se habitue a registar por escrito o seu pensamento e se acostume com a ideia de que a primeira versão escrita nem sempre fica pronta numa primeira tentativa. Colocar ideias no papel de forma clara e articulada é um processo que se aprende ao longo da caminhada. (Santos, 1997, p.23)

Leal (1992) refere que os relatórios permitem o desenvolvimento de capacidades do domínio cognitivo, como a comunicação, a interpretação, a reflexão, a exploração de ideias matemáticas e o espírito crítico, e, no domínio afectivo, o sentido de responsabilidade pessoal e de grupo, a perseverança e a relação entre os alunos. Também Abrantes et al. (1997b) referem as capacidades de raciocínio e de comunicação por um lado e, por outro, as atitudes, como o gosto de pesquisa, a persistência e a responsabilidade. Valadares & Graça (1999) acrescentam que a produção de relatórios escritos contribui para a construção de uma nova visão da actividade matemática.

Varandas (2000) refere que segundo as professoras com que trabalhou, a avaliação deste instrumento de avaliação deverá ser completada com as informações recolhidas durante a observação da realização da tarefa, dado que nem sempre este trabalho escrito faz jus à riqueza da exploração da tarefa realizada. Ainda, o mesmo

autor experimentou uma tabela de descritores de diversos níveis de desempenho dos alunos que se revelou de muito interesse na avaliação do trabalho investigado e na elaboração de comentários para os alunos.

Kilpatrick (1992) salienta que o empenho em realizar um relatório escrito apela à reflexão profunda que não é exigida quando o aluno apresenta apenas uma solução para a proposta em que está a trabalhar. Já Oliveira (1998) refere que se os alunos sentem que o que entregam ao professor constitui uma base para serem classificados, evitam incluir os erros e pistas falsas que exploraram e mais tarde abandonaram.

A avaliação das tarefas de investigação do ponto de vista formativo privilegia o desenvolvimento do poder matemático dos alunos através da sua responsabilização na evolução do processo de ensino e aprendizagem. Apelando à regulação das aprendizagens, contribui para a concretização de um modelo de avaliação reguladora. No desenvolvimento de uma actividade de investigação, por um lado, o aluno necessita recorrer às competências adquiridas e às capacidades, atitudes e destrezas desenvolvidas, o que orienta as suas práticas, por outro lado, o aluno consciencializa-se da aquisição de novos conhecimentos, ou capacidades, progredindo assim no processo de aprendizagem.

A opção por uma prática lectiva que não conduz ao desenvolvimento de atitudes de regulação (Perret- Clermont & Nicolet, 1988) passa pela atitude do professor, apesar da autonomia que o professor tem na dinâmica da sala de aula. Um dos factores é o dilema do cumprimento do programa como inibidor da integração de um modelo de avaliação reguladora no processo de aprendizagem:

Será preferível dizer que cumprimos integralmente o programa, embora conscientes de termos assumido a postura directiva, baseada na exposição da matéria, ou será preferível dizermos que não cumprimos integralmente o programa, tendo a certeza de que o que ensinámos foi apreendido pela maioria dos alunos, porque tivemos o cuidado de os avaliar em muitos momentos? (Afonso & Afonso, 1995, pp.146 e 147).

A importância da reflexão dos alunos para a avaliação formativa

Numa perspectiva de construção do conhecimento matemático e aquisição de capacidades, o aluno para clarificar as suas ideias e construir os seus significados, precisa reflectir sobre as suas experiências e sobre as interacções que estabelece com o professor e com os colegas:

É aqui que joga um papel fundamental a discussão e a interacção com os colegas e com o professor tornando conhecidos os significados atribuídos por cada um. O questionar e o argumentar, tanto os alunos uns com os outros, como com o professor ajudará a explicar e a clarificar as ideias de cada um. (Serrazina, 1995, p.36)

A lógica da avaliação reguladora dá ao professor e ao aluno a oportunidade de ter acesso ao pensamento, ao conhecimento e aos significados atribuídos por cada um no processo de ensino e aprendizagem. Esta lógica encontra-se longe do modelo em que o professor é o centro da aula, em que o significado de o professor “dar” aulas pressupõe o tipo de aulas reprodutoras (Varandas, 1994). Aqui, é pertinente considerar que a actividade matemática de cada aluno deverá englobar: identificar questões, formular, testar e provar conjecturas, argumentar, reflectir e avaliar. Sem esta premissa o funcionamento da avaliação reguladora pode ficar irremediavelmente comprometido. Ao não considerar o funcionamento dos processos de investigação, o aluno não tem oportunidade de reflectir, realizando uma auto-avaliação limitada e consequentemente, não se verifica a esperada regulação das aprendizagens.

Assim, a aprendizagem da Matemática é entendida como um processo de construção activa individual, como um processo de aculturação das práticas matemáticas a uma sociedade mais alargada (Yackel & Cobb, 1996; English et al., 2002), sendo o conceito de aprendizagem entendido como: a reconstrução subjectiva dos saberes sociais e dos modelos através da negociação de significados em interacção social (Cobb & Bauersfeld, 1995), onde é necessário desenvolver uma atitude crítica e reflexiva.

Ao nível cognitivo, na aprendizagem da Matemática, a reflexão poderá significar a apropriação de um conhecimento matemático:

A constituição de significado, tal como a entendemos, implica uma interacção constante do aluno com situações problemáticas, interacção dialéctica (porque o sujeito antecipa, finaliza as suas acções) em que ele investe conhecimentos anteriores, submete-os a uma revisão, modifica-os, completa-os ou rejeita-os para formar concepções novas. (Brousseau, 1976, p.104)

Relativamente, e acerca da construção do conhecimento matemático, Domingos (2002) discute o papel do conceito “definição” e conceito “imagem” na construção dos

conceitos matemáticos e a importância do simbolismo na transição do pensamento processual para o pensamento conceptual. No primeiro caso, a abordagem dada por Vinner (1991), o conhecimento de uma definição de um dado conceito não garante a compreensão do mesmo, para isso precisamos de ter um conceito imagem. Assim, Vinner (1991) elabora um modelo explicativo da construção do conhecimento matemático baseado nas relações que se estabelecem entre ambos. Segundo ele, os conceitos matemáticos devem ser adquiridos recorrendo a vários exemplos e contra-exemplos como reforço do conceito imagem e as definições devem ser introduzidas como o último critério das tarefas matemáticas. No segundo caso, baseia-se na forma como a espécie humana, a partir de actividades na interacção com o meio, consegue desenvolver conceitos abstractos bastante subtis. É uma visão onde a percepção, a acção e a reflexão ocorrem segundo várias combinações num dado momento e o foco numa delas pode levar a tipos de matemática muito diferentes. Considerando-se desta forma três tipos de matemática: Espaço e Forma, Matemática Simbólica e Matemática Axiomática (Tall, 1995; Tall et al., 2001). A reflexão na percepção e na acção em matemática conduz eventualmente ao desejo de uma teoria axiomática consistente baseada em definições formais e deduções, que ao nível escolar, em actividades de investigação, se designa pela procura da generalização.

Ao nível da educação matemática, para Santos et al. (2002) a reflexão sobre as Investigações que os alunos fazem é essencial para que eles possam tomar consciência dos processos seguidos. Este argumento é usado para solicitar aos alunos relatórios escritos descrevendo a investigação realizada. Acerca dos relatórios escritos, Varandas (2000) e Brocardo (2002) consideram, ainda, que a qualidade vai aumentando com o decorrer do trabalho em torno de tarefas de investigação e isso provém do desenvolvimento da capacidade de reflexão. Também numa actividade de investigação tem importância a fase da discussão como sendo uma oportunidade de os alunos reflectirem sobre o trabalho desenvolvido. Para Segurado (2002), terminar uma aula de investigação sem reflectir sobre ela é de algum modo não a ter finalizado.

Do ponto de vista cognitivo ou do ponto de vista do trabalho da sala de aula existe lugar à consideração de que o conhecimento matemático é construído em interacções sociais (Matos, 1994), como resultado da própria experiência, das experiências realizadas, dos conflitos, da modificação do que já se sabe através das experiências (Serrazina, 1995). Davis e Mason (1989) e Cobb (1988) propuseram uma perspectiva de ensino e aprendizagem que sugere que o conhecimento de qualquer

pessoa não é adquirido do exterior, mas construído pelo próprio indivíduo. Para estes autores, os indivíduos adaptam o que já sabem à luz das suas novas experiências.

Também para Glaserfeld (citado em Serrazina, 1995) o conhecimento dos alunos não é passivamente recebido mas activamente construído por eles e que a função da cognição é adaptativa e serve a organização do mundo experimental e não a descoberta da realidade ontológica. De acordo com Bishop e Goffree (1986) um significado matemático é alcançado ao estabelecer conexões entre uma ideia matemática particular e o restante conhecimento pessoal do aluno.

Neste processo reflexivo, em que a regulação das aprendizagens tem em vista a aquisição de competências matemáticas, o aluno ziguezagueia entre interações e auto-avaliação e auto-avaliação e regulação. Ao reflectir sobre este processo o aluno adquire competências matemáticas que emergem da actividade desenvolvida (Skovsmose, 2000). Na auto-avaliação reflexiva, o aluno confronta-se com os seus erros e as suas dificuldades e procura interações para as ultrapassar. É necessário reflectir sobre os erros, raciocínios erróneos e dificuldades sentidas pelos alunos no decurso de actividade de investigação. Este conhecimento contribui para revelação das estratégias seguidas pelo aluno e da natureza das suas representações. No desenvolvimento de uma tarefa, o erro faz parte do desenvolvimento da própria tarefa (Pinto, 2003).

Nas actividades de investigação, os alunos são confrontados com a negação ou aceitação de uma conjectura e algumas vezes fazem-no de forma errada. Os erros cometidos durante o processo de investigação podem emergir de vários factores, entre eles: falta de conhecimentos ou técnicas, de raciocínios erróneos, de escolha da estratégia errada, de enganos de cálculo, de dificuldades de comunicação, etc. O aluno não deve encarar estas dificuldades como um obstáculo inultrapassável, deve pelo contrário, ser incentivado a reflectir sobre os mesmos e usá-los como uma oportunidade para esclarecer as suas dúvidas. Errar tem de ser visto como natural e não penalizador (Santos, 2003a). Quando isto acontece, os erros funcionam como um impulsionar de interações a estabelecer, em especial com o professor, de forma a corrigi-los.

O erro contribui para a regulação das aprendizagens através da aferição contínua entre aquilo que eu-aluno faço e aquilo que eu-aluno deveria fazer e ainda não consigo fazer. Esta consciencialização contribui para uma maior implicação do aluno no processo de regulação das aprendizagens e fortalece a atribuição de significado às competências adquiridas.

Os avanços e recuos, no processo de aprendizagem, levam o aluno a reflectir, interagir e aprender, não de uma maneira sequencial, mas de uma forma integrada. No caso da avaliação formativa de regulação interactiva, os erros funcionam como um ajuste ou um contributo para a reorientação da tarefa. Na regulação retroactiva, a identificação dos erros exige “actividades de remediação, destinadas a superar, posteriormente, as dificuldades, ou a corrigirem os erros...” (Hadji, 1994, p.126). Na proactiva, a orientação dada ao aluno tem de ir no sentido de dinamizar novas estratégias, diferentes e orientadas para a concretização da tarefa.

Como desenvolver uma modalidade de avaliação formativa

Para Nunziati (1990) existem bases fundamentais para a concretização de um processo de avaliação formativa: (1) é necessário transformar os habituais currículos em sequências de aprendizagens em que os alunos conhecem os objectivos da disciplina, as tarefas e os critérios de avaliação; (2) é importante existir um plano de remediação dos erros com propostas de trabalho que incluam o essencial; (3) o corrector (professor) tem de modificar o seu comportamento, devendo incluir os erros na dinâmica do processo de ensino e aprendizagem e até dando-lhes valor positivo; (4) é necessário recorrer sistematicamente à auto-avaliação; e (5) incentivar o trabalho de equipa, na escola, em que se trabalhe as opções metodológicas de forma a facilitar nas diferentes disciplinas as operações de análise, de síntese e de avaliação.

Na mesma ordem de ideias, para o desenvolvimento da avaliação formativa Allal (1986) propõe uma sequência de etapas práticas fundamentais: (1) recolha de informação relativa aos progressos e dificuldades de aprendizagem sentidas pelos alunos; (2) interpretação dessas informações numa perspectiva de referência criterial e diagnóstico dos factores que estão na origem das dificuldades de aprendizagem observadas no aluno; (3) adaptação das actividades de ensino e de aprendizagem de acordo com a interpretação das informações recolhidas. Estas três etapas podem ser articuladas entre si de diferentes formas, tendo em conta os alunos, as interacções vigentes, as tarefas, o contexto de aprendizagem e a própria instituição.

Às já referidas avaliação pontual (regulação retroactiva) e avaliação contínua (regulação interactiva) há a acrescentar uma modalidade mista de aplicação da avaliação formativa, que combina em maior ou menor grau os dois tipos anteriores. No caso da regulação retroactiva, o tempo dedicado à aprendizagem é dividido por uma sucessão de etapas que inclui actividades de ensino – tarefas de verificação – actividades de

remediação – actividades de ensino (...). Aplicando uma modalidade de regulação interactiva, o professor observa o aluno durante o processo de aprendizagem, identifica as dificuldades e logo que aparecem diagnostica os factores que estiveram na sua origem e desenvolve adaptações de resposta. Adoptando uma modalidade mista, três casos podem ser distinguidos (adaptado de Allal, 1986, p.190):

A: actividades de ensino e aprendizagem – tarefas de verificação – actividades de remediação, com regulação interactiva;

B: regulação interactiva – tarefas de verificação – actividades de remediação;

C: regulação interactiva – tarefas de verificação – regulação interactiva.

Qualquer um destes casos situa-se a meio termo entre a regulação retroactiva e a interactiva. Caminhando de A até C vamo-nos aproximando da situação ideal, a avaliação reguladora que inclui a regulação interactiva.

No desenvolvimento de uma estratégia de avaliação reguladora que passe pela regulação interactiva, o feedback fornecido ao aluno pode ser um instrumento importante para a sua regulação das aprendizagens (Santos, 2003c). Também para Sadler (1989), o feedback assume um papel crucial na aprendizagem. Os professores podem recorrer ao feedback para mostrar aos alunos que o conhecimento matemático é construído por avanços e recuos, tentativas e erros, conjecturas e refutação ou prova, e assim desmontar a noção de “edifício matemático”, onde tudo se articula na perfeição, de modo a que os alunos possam evoluir e aprender.

Tunstall & Gipps (1996) classificam e descrevem o feedback em duas categorias: (a) feedback avaliativo, que consiste em formação de juízos de valor com utilização implícita ou explícita de normas; (b) feedback descritivo, que está relacionado com o desempenho do aluno face a tarefas propostas, fazendo referência específica ao que consegue fazer. No caso deste último, dividem-no em dois tipos associados à avaliação formativa: especificando o progresso e construindo o caminho seguinte. Estes dois tipos de feedback proporcionam aos alunos e aos professores vivências do processo de ensino aprendizagem distintas das referidas no relatório Matemática 2001 (APM, 1998) como predominantes nas aulas de matemática em Portugal, e também proporcionam aos alunos dois modos diferentes de aprendizagem em matemática. Especificando, o progresso os alunos vão evoluindo através de um caminho delineado pelo professor, para o qual são chamados à atenção quando dele se afastam. No caso de construindo o caminho seguinte, a interacção professor-aluno é mais forte e o professor

assume uma postura de acompanhamento e de resposta às questões colocadas pelos alunos, acontecendo a aprendizagem de forma interactiva.

Quadro 1 – Feedback descritivo nas interacções em tarefas de investigação.

Feedback descritivo	
Especificando o progresso	Construindo o caminho seguinte
Reconhecimento de conhecimentos específicos; O uso de modelos de trabalho e de comportamento; Diagnóstico usando critérios específicos ou a verificação de procedimentos.	Uso de critérios, em parte precisos, em parte vagos; A avaliação do trabalho em conjunto com o aluno; A discussão de formas de progressão; A utilização de estratégias que incentivem a auto-regulação.
Professor: Controle e poder; Apreciações ao trabalho; Indicação do que deve ser feito para melhorar.	Professor: Partilha de poder e responsabilidade. Sensação de trabalho em progresso; Encorajamento da percepção e reflexão sobre as tarefas desenvolvidas.

Para Santos (2003c) considera-se que um comentário que sirva a avaliação reguladora deverá apresentar algumas características: ser claro, para que autonomamente possa ser compreendido pelo aluno; apontar as pistas da futura acção, de forma que a partir dele o aluno saiba como prosseguir; incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta; não incluir a correcção do erros, no sentido de dar ao próprio a possibilidade de ser ele a identificar o erro e a alterá-lo de forma a permitir que aconteça uma aprendizagem mais duradoura ao longo do tempo; identificar o que já está bem feito, no sentido não só de dar autoconfiança como igualmente permitir que aquele saber seja conscientemente reconhecido.

Outros investigadores consideram que as características do processo de ensino e aprendizagem são tão específicas que dependem da individualidade do professor e do aluno. Nesta perspectiva a avaliação do aluno só faz sentido se o professor desenvolver uma avaliação paralela dos seus métodos, processos, metodologias e estratégias com base na informação recolhida em relatórios escritos pelos alunos:

Relatório-Avaliação: 1. identificação do aluno, do professor, da disciplina, do tema da aula, data e número de aula; 2. uma síntese do conteúdo da aula em espaço limitado; 3. bibliografia e referências

pertinentes não repetindo aquela fornecida ou sugerida pelo professor; 4. comentários e sugestões sobre a aula, o tema e a disciplina. Esta proposta parte da aceitação do facto do professor estar no processo permanente de melhorar a sua prática e nada melhor para isso do que analisar o seu desempenho através de relatórios dos alunos que participaram na actividade. Não se trata de dar uma nota ao professor, aprová-lo ou reprová-lo, mas sim dar-lhe os elementos para analisar a sua prática. Da mesma maneira, o professor está interessado em saber o quanto daquilo que ele pretendia que os alunos aprendessem foi compreendido pelos alunos. Se a sua mensagem não foi captada, é sua obrigação voltar ao tema explicando-o de outro modo. Se a sua mensagem foi captada em geral, mas um ou outro aluno demonstraram, no relatório, não terem captado a essência da mensagem, cabe ao professor verificar o que se passa com esses alunos. Ajudá-los, se for necessário, a superar dificuldades, motivá-los se for o caso. É uma forma de avaliação como um todo. (D'Ambrósio, 1994a, p.140)

Outro conceito que é referido por muitos autores, como elemento de análise na avaliação formativa, é o contrato didáctico (Brouseau, 1994, 1996; Jonnaert, 1996; Schubauer-Leoni, 1988). Existe explicitamente ou implicitamente na sala de aula e é um acordo que se estabelece entre o professor e os seus alunos a propósito do saber, de sua apropriação e de sua avaliação.

No ensino secundário, como lembra Chevallard (1991), a gestão do processo de ensino e aprendizagem exige um reajuste permanente dos conteúdos e dos ritmos do ensino em função do trabalho e do nível dos alunos, de sua participação, do nível de compreensão e de memorização que manifestam. A interacção entre o professor e o aluno permite que o aluno tome consciência das suas dificuldades e procure ajuda no professor. Mas é importante que a interacção se mantenha. Se o professor adoptar uma estratégia de exigências excessivas, o aluno pode desmotivar e deixar de solicitar o professor (Perrenoud, 1996).

Para evitar a ruptura, o professor deve definir os caminhos a seguir para desenvolver as capacidades e os conhecimentos dos alunos, os instrumentos que vai usar para verificar se os alunos os alcançaram, os métodos de trabalho, as atitudes e como se pretende intervir junto dos alunos através dos diferentes tipos de regulação. Não se poderá perder de vista que a identificação dos erros, os processos utilizados pelos alunos e a natureza das adaptações a utilizar dependem da estrutura, do conhecimento e das competências a adquirir (Moyer & Milewicz, 2002).

Síntese do capítulo

No ensino secundário existe o problema da sujeição do processo de ensino e aprendizagem a uma avaliação sumativa externa (Casanova, 2002; Guerra, 1995; Leal, 1997; Méndez, 2001; Perrenoud, 2001; Rosales, 1984; Varandas, 2000). Verificam-se alterações substanciais ao nível dos conteúdos a leccionar e das metodologias sem que as mesmas sejam acompanhadas pela alteração do sistema de avaliação. Os professores, nas suas práticas, debatem-se com o dilema de aproximar a sua atitude avaliativa ao que é solicitado pela avaliação externa ou aplicar um ensino diferenciado, centrado nas necessidades do aluno (Afonso & Afonso, 1995; Hadji, 1994; Perrenoud, 1986; Rafael, 1998). Vivem, assim, o dilema do confronto das duas lógicas da avaliação, a formativa e a sumativa.

Perante estas dúvidas, o processo de ensino e aprendizagem fica impregnado de vícios (Leal, 1997; Shepard, 2001) que em nada contribuem para o sucesso do aluno. Se, por um lado é necessário dar atenção aos temas transversais, como as aplicações e modelação matemática ou resolução de problemas e actividades de investigação, por outro lado é necessário preparar os alunos para a realização de provas escritas em tempo limitado, na sua maioria de resposta única. Esta desarticulação é agravada quando as aprendizagens que o aluno adquiriu durante um ciclo de três anos, o ensino secundário, são avaliadas num exame, tendo, este exame, efeitos vinculativos na progressão ou não dos alunos para o ensino superior ou para o mundo do trabalho.

Num processo de avaliação reguladora, em que o aluno seja sistematicamente confrontado com os níveis de desenvolvimento das suas aprendizagens, ele incorpora técnicas de auto-avaliação que o ajudam a avaliar o que consegue fazer (dominar) em dado momento (Jorro, 2000; Perrenoud, 1998, 1999; Vial, 2001). A sua aprendizagem passa pela mudança de atitude relativamente à escola e ao conhecimento em geral. Em cada momento deste processo, o aluno, será solicitado a intervir, autonomamente, de modo a poder construir os seus próprios significados.

Na sala de aula, a procura interactiva de obter resposta para as questões com que é confrontado leva o aluno a aderir a um mecanismo de regulação que permite o ajuste do processo de ensino e aprendizagem. Para que isto aconteça, é necessário que o aluno reflecta sobre a sua aprendizagem, identifique os desvios de raciocínio, os seus erros e os ultrapasse (Abrecht, 1991; Pinto, 2003). Para desenvolver a reflexão sobre a aprendizagem, o aluno tem necessidade de estabelecer interações com outros intervenientes do processo do ensino e aprendizagem (César & Torres, 1998), de

negociar significados (Wertsch, 1991), de tarefas que possibilitem diferentes abordagens, de obter feedback sobre o trabalho realizado (Black & Wiliam, 1998; Hadji, 1994; Perrenoud, 1999; Santos e al., 2002) e necessita de tempo.

Na assumption de que o aluno reflecte sobre o que aprendeu e como o aprendeu (Ponte, 2003), este fica munido da capacidade de se auto-avaliar contribuindo assim para uma verdadeira regulação das aprendizagens. As interacções, a reflexão sobre o aprendido e a auto-avaliação são factores que contribuem para que a aprendizagem se torne significativa (Bishop & Goffree, 1986). Para caminhar no sentido da apropriação de conhecimentos e de técnicas e o desenvolvimento de capacidades e atitudes, é necessário que o mecanismo de avaliação reguladora seja incluído nas práticas de avaliação.

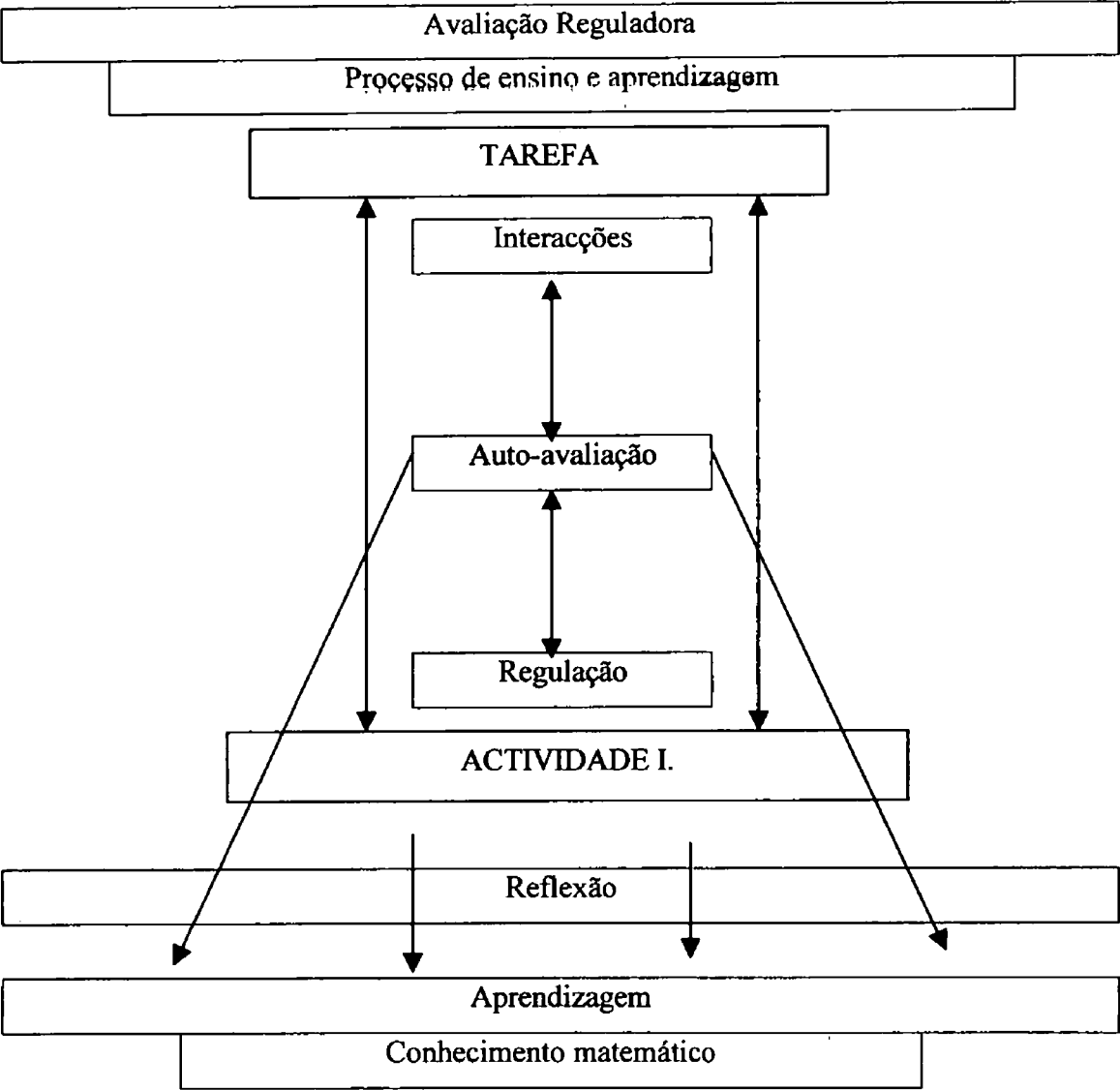
Em minha opinião, o ponto de partida para o funcionamento de um modelo de avaliação reguladora são as tarefas propostas (ver figura 1, página seguinte). A tarefa dá origem à actividade de investigação, onde o aluno tem de realizar várias tarefas. No desenvolvimento da actividade de investigação, as interacções entre pares, com o professor ou com outro tipo de recursos, contribuem para a auto-avaliação. As interacções estabelecidas são de vários níveis e influenciadas por vários quadrantes, o que provoca a consciencialização da aquisição ou não das mais diversificadas competências matemáticas ou sociais.

A auto-avaliação proveniente da constatação de um erro ou uma dificuldade incentiva a procura de novas interacções, o que contribui para a regulação das aprendizagens (Santos, 2002). O confronto entre a necessidade de responder a uma solicitação e a consciencialização de que é necessário desenvolver mecanismos de procura da resposta, promove a regulação das aprendizagens através da auto-avaliação e faz emergir a compreensão de conhecimentos ou capacidades.

A reflexão sobre tudo o que acontece leva a que exista aprendizagem. A aprendizagem não acontece no momento final, mas ocorre em vários momentos ao longo do processo de exploração e desenvolvimento. Existem aprendizagens múltiplas neste processo, em paralelo com a aprendizagem do conhecimento matemático que deverá estar directamente relacionada com a actividade de investigação.

Todo o mecanismo funciona no seio do processo de ensino e aprendizagem que não é isento, nele encontram-se diferentes factores de influência. Não é possível separar o que é o processo de ensino e aprendizagem do que é a avaliação reguladora, uma vez que ambos são meios interdependentes para fazer evoluir.

Figura 1 – Interpretação do processo de avaliação reguladora.



CAPÍTULO II

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

O que é saber matemática

A perspectiva de que aprender matemática deve consistir, essencialmente, em fazer matemática tem sido partilhada por diferentes organizações, educadores matemáticos e investigadores (APM, 1988; Abrantes et al., 1999a; NCTM, 1991, 2000; Santos et al., 2002). As normas (NCTM, 1991) consagram uma perspectiva de ensino da matemática que inclui: “em primeiro lugar, saber matemática é fazer matemática” (p.8), “em segundo lugar, alguns aspectos relativos ao saber matemática mudaram” (p.8) e em terceiro lugar, “as mudanças na tecnologia e o alargamento das áreas em que a matemática se aplica resultaram em crescimento e mudanças da própria matemática” (p.9). Estas suposições reforçam os factores que provocaram a viragem teórica na educação matemática do final da década de 80.

Em Portugal, os primeiros sinais da ideia de aprender matemática é fazer matemática surgiu em 1988:

Desde o princípio da escolaridade até ao fim do ensino secundário, e de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes deverão estar mergulhados num ambiente intelectualmente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam actividades naturais e desejadas. (APM, 1988, p.52)

Esta visão do processo de ensino e aprendizagem tem sido discutida na educação matemática por diferentes investigadores que, em particular, se preocupam com o significado do que é saber matemática (Almeida, 1987; Abrantes, 1994; Amorim, 1996; Brocardo, 2002; Brousseau, 1994; Domingos, 1994; Fonseca, 2000; Matos & Carreira, 1995; Mendes, 1997; Pires, 1992; Ponte et al., 1999b; Porfírio, 1993; Rocha, 2002a; Santos, 1996; Vale, 1994).

Saber matemática assume diversas formas nos trabalhos dos investigadores citados, mas em todos eles podemos encontrar sinais da perspectiva do National Council Teachers of Mathematics (1994). A associação americana considera o saber matemático como “poder matemático”, entendendo como tal a capacidade para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, resolver problemas, comunicar e estabelecer

conexões em matemática, e ainda a perseverança, curiosidade e interesse ao fazer matemática.

Para Abrantes et al. (1999b) as actividades de investigação são *as situações de trabalho na aula* que traduzem “o processo de criação matemática que é inerente ao que é a matemática e ao que significa saber matemática” (p.71). Para além disto, a realização de investigações matemáticas, segundo Ponte (2003), pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, para desenvolverem capacidades de nível superior e até para promoverem novas aprendizagens.

O surgimento desta perspectiva levantou novos problemas de investigação à comunidade de educadores matemáticos. Levou alguns educadores matemáticos a questionarem a forma como os matemáticos profissionais investigam e produzem novo conhecimento. Segundo Ponte (2003), para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou entre novos objectos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades. Este processo, segundo Poincaré (1996), inclui três fases: compilação de informação e experimentação, iluminação súbita, e sistematização e verificação dos resultados.

Um processo de investigação, semelhante ao dos matemáticos profissionais, pode ser vivido pelos alunos com tarefas de natureza investigativa e exploratória. Em contacto com tarefas de características idênticas às dos matemáticos profissionais, os alunos aprendem matemática a fazer matemática (Santos et al., 2002). Os alunos perante o processo vivido pelos matemáticos profissionais, que é multidimensional e tem na sua vertente inferencial uma das características dominantes da actividade de investigação (Oliveira, 2002), têm oportunidade de, “pelo menos durante parte da sua aprendizagem, criar a sua própria matemática” (Hatch, 1995, p.37). Assim, o argumento é que os alunos vivem os processos característicos da investigação feita pelos matemáticos profissionais na realização de actividades de investigação na sala de aula. O que também significa dizer que o aluno aprende como investigador.

Uma questão que tem sido levantada, e não é pacífica entre a comunidade de educadores matemáticos e os matemáticos, é a possibilidade de estabelecer um paralelo entre a actividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática (Garnica, 2001). Da parte dos matemáticos, relacionado com as concepções que têm da matemática e do ensino da matemática, acreditam que é possível aprender matemática recorrendo predominantemente a exercícios de repetição (Buescu, 2003). Para os

educadores matemáticos, em particular para Ponte et al. (1999b), a actividade de resolução de problemas dos matemáticos e dos alunos pode ser equivalente quanto à sua natureza:

Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno. No entanto, a actividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza. (pp.92 e 93)

Q - motivos
- acesso
- legitimidade
- estrutura de
conhecimento
- campo de
problemas

Perante as semelhanças entre os processos em que se encontram envolvidos os matemáticos profissionais e a necessidade de uma actividade matemática rica para os alunos, vários autores referem a necessidade dos alunos serem capazes de utilizar na sala de aula processos próprios da investigação matemática (Mason, Burton & Stacey, 1982; Schonfeld, 1991). O conceito de investigação preconizado sugere que os alunos do ensino secundário possam usar estes processos na sua actividade matemática em contexto de sala de aula, pois, segundo Santos et al. (2002), através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória, os alunos vivem, ao seu nível de maturidade, uma experiência com características idênticas à dos matemáticos profissionais. Ainda, Schonfeld (1991) identifica investigações matemáticas como reveladoras das características que dão sentido àquilo que a matemática é. O mesmo autor discute as actividades que, segundo ele, tem sentido matemático por estarem associadas aos seguintes tipos de comportamento: modelar e simbolizar, comunicar, explorar, conjecturar e provar. Onde se inclui as investigações matemáticas na sala de aula.

+

mainly

Nesta abordagem de ensino e aprendizagem (através das investigações matemáticas), os alunos são confrontados com um conceito de saber Matemática abrangente, que não inclui apenas um conjunto de técnicas e conhecimentos intemporais. Na assumpção de que o aluno aprende matemática a fazer Matemática, o seu saber Matemática não pode ser um conjunto invariável de técnicas e conhecimentos, pelo contrário, é um sistema dinâmico e adaptável de capacidades, atitudes e conhecimentos, onde se inclui o domínio dos processos e das técnicas de investigação matemática. Esta nova perspectiva permite corrigir o que foi identificado por vários investigadores, por exemplo, por Correia (1995) que aponta que os alunos raramente se

→ (+)
- aprender a
fazer
- aprender a
auto

confrontam com situações significativas e formulam questões que conduzam à reflexão e à discussão.

No contexto dos actuais programas de Matemática – A (10ºano) parece indiscutível que o programa possibilita a oportunidade do aluno aprender matemática fazendo matemática. As tarefas de investigação são reconhecidas como uma forma bastante importante de tornar operacional este tipo de aprendizagem. Quer a nível metodológico, como tipo de experiência de aprendizagem a propor aos alunos, quer na rentabilização das tecnologias e nos métodos dedutivos:

[Objectivos e competências gerais]: Manifestar persistência na procura de soluções para situações novas; Seleccionar estratégias de resolução de problemas; Formular hipóteses e prever resultados; Interpretar e criticar resultados no contexto do problema; Formular generalizações a partir de experiências; Validar conjecturas, fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados; (Ministério da Educação, 2001, p.4)

[Sugestões metodológicas gerais]: Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e cooperação. (...) A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, ... (Ministério da Educação, 2001, p.10)

[Tecnologia, objectivos do uso de calculadoras gráficas]: condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas; investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática. (Ministério da Educação, 2001, p.16)

Os processos envolvidos na abordagem do ensino através das investigações matemáticas assumem-se como o garante do desenvolvimento do poder matemático dos alunos (Rojano, 2002). Esta ideia é congruente, nos dias de hoje, com o que se entende por saber matemática. Assim, hoje, saber matemática é saber procurar regularidades, saber formular, testar, justificar e provar conjecturas e, finalmente, saber reflectir sobre o trabalho desenvolvido e avaliar para poder generalizar e aplicar.

No programa de Matemática do ensino secundário de 1991 aparecem os primeiros sinais institucionais de que é necessário alterar as práticas lectivas do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Nos objectivos gerais, no âmbito das capacidades/aptidões, o objectivo: “desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real” (Ministério da Educação, 1991, p.27) dá os primeiros indícios da emergência da ligação do ensino da matemática ao dia-a-dia dos alunos. Na mesma secção pode ler-se: “seleccionar estratégias de resolução de problemas” (p.27), o que mostra a possibilidade dos professores usarem situações de trabalho variadas, em particular resolver problemas (Stanic & Kilpatrick, 1989). Mas na secção observações/orientações metodológicas não aparecem formas explicitas de concretizar este objectivo. Fica-se pelas propriedades, noções, definições, etc.... a explorar. Tal facto provavelmente poderá ter criado resistência à alteração das práticas lectivas dentro da sala de aula de Matemática.

OK,
usar o
pot. ajuar
na resolução
alg. com
mat?

No ajuste do programa de Matemática verificado em 1997 são reforçados os objectivos que apelam a uma nova abordagem no processo de ensino e aprendizagem. Ao nível das finalidades da disciplina é destacada a intencionalidade de: “desenvolver a capacidade de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade” (p.3). Este objectivo procura apelar para que o aluno se torne participativo e consciente das suas necessidades de aprendizagem. Nas orientações metodológicas surge a importância de dar às actividades a propor aos alunos, as características que vão ao encontro da perspectiva das actividades de investigação:

Destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação. (Ministério da Educação, 1997, p.8)

Hoje em dia, ao nível dos programas de Matemática – A, homologados pelo Ministério da Educação em 22 de Fevereiro de 2001 (10ºano), 1 de Janeiro de 2002 (11ºano) e 17 de Maio de 2002 (12ºano) podemos encontrar sinais de que a administração central fez alterações, em particular, no que diz respeito ao destaque dado à resolução de problemas e às tarefas de investigação:

[Módulo inicial] Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação. (Ministério da Educação, 2001, p.33)

Se é legítima a preocupação em ensinar a manejar ferramentas, ela não pode prejudicar o essencial da aprendizagem da Matemática que deve ser procurado ao nível das ideias. (...) Não quer isto dizer que o trabalho com as ferramentas matemáticas possa ser posto de lado no ensino secundário, mas antes quer dizer que o trabalho com as ferramentas matemáticas é ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu maneio e em que seja clara a vantagem do seu conhecimento. (Ministério da Educação, 2001, p.5)

Apesar de perspectivar um processo de ensino através da resolução de situações problemáticas, a organização do programa de Matemática – A mantém a estrutura dos programas de 1991, ajustado em 1997. O tema, entendido como conteúdo da área da matemática, é a estrutura organizacional central (Ministério da Educação, 1997). Quando os temas estão relacionados com técnicas e estratégias são classificados de transversais:

[Temas transversais] Resolução de problemas e actividades investigativas. (Ministério da Educação, 2001, p.6)

[Temas transversais e indicações metodológicas]: ... os estudantes devem ser envolvidos em actividades de natureza investigativa genérica ou ligada a problemas de interesse histórico. (Ministério da Educação, 2001, p.21)

Ao nível curricular são usados os termos resolução de problemas e investigações matemáticas sem se definir uma distinção entre eles. Esta distinção, entre o que é um problema e o que é uma tarefa de investigação matemática, tem ocupado alguns investigadores e não é pacífica. Uma actividade de investigação para determinados alunos não passa da resolução de um problema, enquanto que um bom problema pode dar origem a uma grande investigação.

A resolução de problemas assume, em Portugal, um papel de maior destaque a partir da década de 80 do século passado. A percepção sobre a existência de vários tipos de problemas, cada um dos quais com diferentes potencialidades e interesses (Abrantes, 1988), e a análise de cada tipo de problemas levou a um interesse cada vez maior pelas

questões abertas, sendo estas susceptíveis de dar origem a actividades de investigação matemática por parte dos alunos (Ponte, 2003). A importância dada aos problemas no processo de ensino e aprendizagem surgiu também como consequência de, por exemplo, o avanço das tecnologias colocadas ao dispor dos professores e dos alunos no início da década de 90. Mais, ainda, o facto de existirem documentos internacionais, como as Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991), e projectos, como o MAT₇₈₉ (Abrantes et al., 1997b), que impulsionaram a investigação e a experimentação de novas situações de trabalho e avaliação nas práticas lectivas das salas de aula.

A inicial terminologia de resolução de problemas, do final da década de 80, veio dar lugar à separação do conceito de problema em problemas e investigações na década de 90 (Frobisher, 1994). Esta distinção é assumida por muitos professores e educadores matemáticos, no entanto é de salvaguardar que a separação também pode ser difícil pelo facto da classificação estar dependente da pessoa que resolve o problema ou desenvolve a investigação. Por exemplo, Ernest (1996) distingue-os à partida pela formulação. Na resolução de problemas as questões são formuladas à partida enquanto que nas tarefas de investigação as questões são o primeiro passo da actividade investigativa. O que também é referido por Serrazina et al. (2002), os problemas podem ser mais estruturados ou mais abertos e referir-se a situações puramente matemáticas ou contextos da vida real, mas as questões estão claramente estruturadas desde o início e são apresentadas já formuladas aos alunos, enquanto que um dos atributos essenciais das investigações é a formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objectivos por parte dos alunos. Ao nível das interacções estabelecidas nas relações dentro da sala de aula e nos papéis desempenhados por cada actor, também existem divergências: na resolução de problemas é o professor que coloca as questões e o aluno procura um caminho para encontrar a solução; nas investigações matemáticas o professor escolhe a situação de partida e o aluno formula as questões e escolhe o caminho de abordagem (Brocardo, 2002; Brunheira, 2000; Ponte et al., 1999b; Varandas, 2000).

A integração das investigações matemáticas no currículo também deve significar a alteração do sistema de avaliação. A actividade passa a estar centrada no aluno, o que leva a dar mais atenção à avaliação reguladora. A avaliação reguladora realiza-se em qualquer ponto ou fase de uma investigação e tem por objectivo verificar como as coisas estão a decorrer com vista a aperfeiçoá-las, se necessário. O seu papel mais importante é

ajudar o aluno a saber onde está e como avançar. Este é um problema que os educadores matemáticos continuam a estudar, nomeadamente no que respeita à problemática da integração das tarefas de investigação no currículo e na avaliação escolar, como afirmam Ponte et al. (2002b):

Por resolver continuam as questões da gestão curricular – como articular este tipo de tarefas no currículo – e na avaliação – não só o modo de avaliar o desempenho dos alunos mas também o modo de integrar os elementos referentes a estas tarefas num sistema global, coerente, de avaliação. (p.4)

A necessidade de continuar a procurar conhecer a esta problemática advém de nas diferentes perspectivas existirem vários exemplos de confronto diferenciado dos alunos com as actividades de investigação:

Ao envolverem-se em actividades de investigação e exploração os alunos interessaram-se por aquilo que estão fazendo, criando por vezes, cada um, o seu método de enfrentar o problema e estabelecendo percursos distintos para chegar às soluções. (Mendes, 1997, p.211)

Tarefas que exigem dos alunos a formação dum procedimento memorizado de uma maneira rotineira, conduzem a um único tipo de oportunidade de os alunos pensarem. Tarefas que exigem aos alunos para pensarem conceptualmente e que os estimulem a fazerem conexões, conduzem a um conjunto diferente de oportunidades para os alunos pensarem. (Stein & Smith, 1998, p.1)

Também existe evidência que os alunos reforçam as suas aprendizagens ao realizarem actividades de investigação, nomeadamente melhoram as suas capacidades de comunicação:

Os alunos, de um modo geral, evidenciaram alguma melhoria na forma de comunicar as suas ideias, quer oralmente quer por escrito. (Rocha, 2002a, p.122)

Mas há outros factores que contribuem para a sua inclusão curricular. Ponte et al. (1999c) justificam a integração das actividades de investigação no currículo de Matemática baseando-se no papel que desempenham enquanto fornecedoras de múltiplos pontos de entrada para alunos de diferentes níveis de competência matemática.

Estes exemplos e outros não citados contribuem para que eu acredite que é necessária a continuação da pesquisa acerca das investigações matemáticas e partilhe as ideias preconizadas por Pólya (1966), o ensino da Matemática deve incluir as actividades de conjecturar e explorar:

Se o ensino da Matemática dá só uma perspectiva unilateral, incompleta, do pensamento de um matemático, se suprime totalmente aquelas actividades informais de conjecturar (guessing no original) e extrair conceitos matemáticos do mundo visível à nossa volta, ela negligência aquilo que pode ser a parte mais interessante para a generalidade dos alunos, a mais instrutiva para o futuro utilizador da Matemática e mais inspiradora para o futuro matemático. (pp.124-125)

Também Davis e Hersh (1995), ao analisarem as questões relacionadas com o trabalho dos matemáticos, contribuíram para o reforço da perspectiva que o ensino da matemática deve incluir experiências diversificadas, onde seja possível conjecturar, explorar, provar e generalizar. Estes sinais, ao longo dos tempos, fizeram com que se desenvolvesse a ideia de que saber e aprender matemática é fazer matemática (Fonseca, 2002). Hoje em dia esta ideia é trazida para o contexto da sala de aula através das diversas experiências matemáticas que incluem as investigações matemáticas no currículo português.

A pertinência das investigações matemáticas na sala de aula

Os alunos, na aula de Matemática, são confrontados com diferentes tipos de tarefas matemáticas, que são desenvolvidas em várias situações. O próprio Ministério da Educação sugere, através dos programas de Matemática (Ministério da Educação, 2001), que os professores diversifiquem os tipos de tarefas a propor aos alunos, usem abordagens diferenciadas, proporcionem diferentes formas de trabalho e de avaliação.

A pertinência da inclusão das investigações matemáticas na sala de aula foi abordada no relatório final do estudo Matemática 2001 (APM, 1998). Neste documento refere-se a inclusão de exercícios, problemas, exposição pelo professor, trabalho com situações da realidade, discussão entre alunos, actividades de exploração, história da matemática e trabalho de projecto como situações de trabalho incluídas nas práticas lectivas na aula de matemática.

A partir do estudo Matemática 2001, realizado pela Associação de Professores de Matemática, sobre a situação do ensino da matemática em Portugal foi possível

inferir o lugar que as investigações ocupam no ensino da matemática. A equipa que realizou o estudo, no item *situações de trabalho na aula*, identificou as actividades de exploração com a percentagem de 15% nas somas das percentagens atribuídas aos valores mais elevados *sempre e em muitas aulas*. Neste item, os professores podiam optar entre *nunca ou raramente, em algumas aulas, em muitas aulas e sempre ou quase sempre*, numa lista de situações que incluía exercícios, problemas, exposição pelo professor, trabalho com situações da realidade, discussão entre alunos, actividades de exploração, história da matemática e trabalho de projecto. A constatação de que os exercícios são a situação de trabalho na aula mais frequente, com 93% na soma dos valores *sempre e em muitas aulas*, levou a equipa do estudo a recomendar que a prática pedagógica deveria incluir situações de trabalho variadas, em que se valoriza as tarefas que promovem o desenvolvimento do pensamento matemático (nomeadamente, resolução de problemas e actividades de investigação) e diversifiquem as formas de interacção em aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto (APM, 1998). Este estudo terminou em 1998 e aponta “um conjunto de sugestões e medidas a tomar, cuja concretização depende naturalmente da decisão dos diversos intervenientes – os professores, as escolas, as instituições de formação, a administração...” (APM, 1998, p.7), nomeadamente na sala de aula: 1) a prática pedagógica deve valorizar as tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, resolução de problemas e actividades de investigação; 2) a prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem; 3) o manual escolar deve ser usado de modo a promover a capacidade de auto-aprendizagem e o espírito crítico dos alunos; 4) os professores devem procurar encontrar formas diversificadas de recolha de dados para a avaliação dos alunos.

Outro trabalho que contribuiu para a discussão acerca da inclusão das investigações matemáticas nas aulas foi o projecto MAT₇₈₉ (1997). Desenvolveu-se um currículo experimental de matemática para os alunos do 7º, 8º e 9º anos de escolaridade. Este currículo foi concebido numa perspectiva que destaca a intenção e a natureza interactiva, cooperativa e reflexiva da aprendizagem:

... a intencionalidade das actividades dos alunos – isto é, que essa actividade seja conduzida por objectivos de que os alunos se apropriam

– e que salienta a natureza interactiva, cooperativa e reflexiva da aprendizagem da matemática. (p.117)

Para a concretização destes objectivos, a equipa do projecto optou por destacar a ênfase na resolução e exploração de situações problemáticas, nas relações da matemática com a realidade, na realização de projectos, na utilização dos computadores e das calculadoras e no trabalho de grupo. As situações mais abertas, como os trabalhos que envolviam actividades de investigação e os projectos, desempenharam um papel significativo no envolvimento dos alunos, através da criação de oportunidades para revelar os seus trabalhos e aptidões e para mostrar os seus melhores trabalhos. Uma perspectiva inovadora na época.

Na investigação realizada por educadores matemáticos, alguns estudos empíricos sobre investigações matemáticas desenvolvidos em Portugal sugerem que através delas é possível valorizar tanto os diferentes objectivos gerais como os temas específicos dos programas de matemática (Oliveira et al., 1999c). Vejamos alguns exemplos. Rocha (2002a) analisou o desempenho de uma turma de alunos do 7º ano na realização de tarefas de investigação. Esta autora salienta a progressão dos alunos à medida que se vão habituando às características deste tipo de trabalho. Segurado (2002) estudou o desempenho de uma turma de alunos do 6º ano. Concluiu que os alunos conseguem abordar com sucesso as tarefas de investigação e evoluem no sentido de se tornarem confiantes nas suas capacidades, de aumentarem a sua capacidade de resolver e formular problemas, de comunicar e raciocinar matematicamente. Enquanto que, para Sousa (2002), também para uma turma de 6º ano, mas desta vez num contexto de investigação estatística, os alunos organizaram-se na recolha e tratamento de dados. Uns mediavam e outros perguntavam, observavam e registavam os dados que iam recolhendo. Já outra investigadora, Amorim (1996), usou a aplicação da matemática ao mundo real, explorando assim a modelação. Estes são alguns dos estudos que mostram o envolvimento dos alunos, a sua progressão, o seu desempenho e a sua evolução no processo de ensino e aprendizagem no confronto com investigações matemáticas.

Outros investigadores realçam os temas transversais do programa de matemática. Matos & Carreira (1995) analisaram o modo como um grupo de alunos resolve um problema. Porfírio (1993) descreve a evolução dos alunos na realização de actividades de formulação de problemas. Almeida (1987), Domingos (1994) e Pires (1992) debruçaram-se sobre o uso de diferentes representações, usando-as como forma

de tornar os processos de comunicação mais fáceis, ligando a manipulação simbólica com os significados atribuídos aos conceitos.

Quer se trate de objectivos gerais, quer temas transversais ou específicos, nestes estudos sugerem-se questões que se encontram por clarificar e que dizem respeito à natureza das actividades de investigação. Que enquadramento lhes deve dar o professor? Deverão ser situadas num quadro de contextos essencialmente matemáticos ou estendidas a contextos realísticos (Ponte, 2003)?

Com as investigações matemáticas pretende-se que os alunos se envolvam no seu processo de ensino e aprendizagem, através da participação activa e da gestão autónoma e responsável desse processo. As investigações matemáticas aparecem como sendo uma tarefa entre outras, no entanto, com o pressuposto de que incluídas em experiências variadas são facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, pelas oportunidades de formular e testar conjecturas e analisar contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações.

Hoje em dia, é importante que os alunos sejam confrontados com actividades de investigação durante a sua aprendizagem, quer pela vivência de processos característicos de investigação que essas actividades permitem, quer pelos novos desafios colocados à ciência em geral. Mas, a introdução destas orientações tem sido lenta e progressiva e com a revisão curricular, que entrou em vigor em Setembro de 2004, foi dado mais um passo a nível institucional, onde se encontram algumas das orientações preconizadas pelo Matemática 2001 e pelo MAT₇₈₉.

A aprendizagem através da metodologia de investigações matemáticas traz alterações muito significativas acerca das concepções que o professor e o aluno têm do processo de ensino e aprendizagem (Serrazina & Ponte, 1999). Numa investigação não há resultados conhecidos para os alunos e não se espera que estes alcancem a resposta correcta, ou que todos encontrem a mesma resposta, mas procura-se que explorem as possibilidades, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas (Pirie, 1987). Estas alterações obrigam a que o professor e o aluno reflectam sobre o trabalho que desenvolvem dentro da sala de aula e que as práticas lectivas sejam alteradas, nomeadamente ao nível da avaliação.

A alteração das práticas lectivas pressupõe que os alunos admitam que a se pode ter uma atitude activa relativamente à aprendizagem da matemática e à ciência em geral. Na primeira edição do livro *Conceitos Fundamentais da Matemática* de Bento de Jesus Caraça (2000) referem-se duas atitudes antagónicas em relação à ciência:

A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (p.xxiii)

Também na relação do aluno com a sua aprendizagem pode ser assumida a segunda perspectiva, em que as investigações matemáticas precisam ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos, uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que as demonstrem e resistam a sucessivos testes. Esta perspectiva do saber matemática engloba-se num paradigma de ensino que inclui o processo pessoal e autónomo de construção dos conhecimentos, os erros, o ziguezague, os avanços e os recuos.

As importantes potencialidades educacionais das investigações matemáticas não se esgotam na contribuição para o reforço e consolidação do poder matemático dos alunos. Estimulam também a participação dos alunos, favorecem a aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes e diversificados, facilitam o envolvimento dos alunos com diferentes níveis de competência e evidenciam o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões (Santos et al., 2002). E ainda, segundo Segurado (1997), proporcionam o estabelecimento de diversas interações dentro da sala de aula.

Relativamente aos processos envolvidos nas investigações matemáticas, a partir da proposta de investigação, há que possibilitar o contexto em que o aluno seja confrontado com atitudes questionadoras como as que foram referidas por Tudella et al. (1999):

Atitudes questionadoras, a observação e análise de situações, a formulação de conjecturas, a procura de explicações e de argumentação, onde a criatividade e o desenvolvimento de ideias próprias têm um papel muito importante. (p.90)

Também Ponte et al. (1999a), reconhecem que uma actividade matemática rica envolve necessariamente trabalho investigativo, e destacam as diferentes fases desse trabalho de investigação. Embora incluam algumas das fases já citadas de Tudella et al.

(1999) acrescentam mais algumas, focando as seguintes: o reconhecimento da situação, a formulação de questões, a formulação de conjecturas, o seu teste e refinamento, a argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado. As duas perspectivas aparecem ordenadas por uma determinada sequência, embora a segunda seja mais completa porque especifica algumas fases intermédias. No entanto, Brocardo (2002, 2003) caracteriza o processo investigativo usado pelos alunos, em actividades de investigação, como um processo não linear e explicita as fases de recolha e organização de dados, de formulação e teste de conjecturas e de prova. A mesma autora salienta que os alunos, inicialmente, têm tendência para transformar as primeiras experiências de recolha de dados num fim em si mesmo e mostram alguma dificuldade em entender a investigação como um todo. Mas, passado algum tempo, fazem um percurso de pequenos avanços e recuos, que, no meu entender, corresponde a uma forma de auto-regulação das aprendizagens. O aluno afere o conhecimento que vai obtendo na sua investigação com os conhecimentos que detém, atribuindo-lhe significado ou reformulando as suas conjecturas de forma a aprofundar a exploração.

Desta forma, é possível afirmar que as investigações matemáticas são uma metodologia de ensino que permite a inclusão da avaliação reguladora nas actividades de aprendizagem, uma vez que permite um envolvimento diferenciado dos alunos, a autonomia, a reflexão, a auto-avaliação que são inerentes à própria matemática. Mas a dinâmica de uma aula com investigações tem características próprias a ter em conta (Varandas & Nunes, 1999), é necessário preparar o modo como a tarefa é proposta, que metodologia de trabalho usar e como confrontar os processos usados.

Tudella et al. (1999) referem três fases para a estrutura de uma aula de investigações: introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa e discussão final. Também Oliveira et al. (1999b) referem três momentos de uma aula de investigações: introdução, realização e discussão da investigação. Na introdução da tarefa, referem-se ao modo como a tarefa é proposta aos alunos: modo misto, com a distribuição do enunciado escrito e complementado por uma apresentação oral para toda a turma; modo escrito, apresentação apenas por escrito. O segundo modo implica um maior apoio do professor junto dos alunos, mas é de esperar que permita aos alunos o desenvolvimento de uma maior independência em relação ao professor e estes percebam com maior facilidade o que lhes é pedido.

No desenvolvimento, salientam o papel das interacções professor-alunos e aluno-aluno como conducentes a um trabalho mais rico, onde se privilegiam os aspectos

Aliterary?

já referidos (atitudes questionadoras, observação e análise de situações, a formulação de conjecturas, a procura de explicações e de argumentações). Para Tudella et al. (1999), o auxílio que o professor dá aos alunos pode ser traduzido por: estímulo ao confronto de opiniões; incentivo ao sentido crítico, à reflexão e à argumentação; informação pertinente e aproveitamento do erro e motivação. Mas, estes autores também se referem às interações com o professor por solicitação do aluno para esclarecer dúvidas ligadas a conceitos; validar o trabalho realizado; apoiar ideias e arbitrar conflitos. As interações entre alunos são referidas como estimuladoras da descoberta de novas relações entre os conceitos, reforço da segurança nas ideias matemáticas e estímulo do raciocínio, criatividade e argumentação.

Na discussão final, é dada ênfase à reflexão como um elemento indispensável numa aula de investigação, para que o aluno pense e reflita sobre a actividade realizada. No entanto, os referidos autores centram-se na reflexão através da discussão final sobre a actividade, o que segundo outros autores (Brocardo, 2002; Kilpatrick, 1992; Varandas, 2000) não é a única forma de o fazer. Segundo Leal (1992), existem potencialidades da reflexão que podem ser desenvolvidas através da elaboração de um relatório escrito sobre o trabalho realizado, o que evidencia que a solicitação de um documento escrito ao aluno é uma forma de avaliação e de aprendizagem (D'Ambrósio, 1994a; Menino & Santos, 2004). O confronto de opiniões, a necessidade de justificar e a tomada de consciência dos processos seguidos permite afirmar que a aprendizagem não resulta só da actividade mas também da reflexão sobre a actividade (Bishop & Goffree, 1986).

Os alunos e a investigação matemática

No caso do processo de ensino promover a regulação das aprendizagens pelo aluno, as tarefas solicitadas assumem um papel muito importante pois têm o intuito de desencadear actividade. O significado atribuído a cada proposta e a actividade desenvolvida não são os mesmos para todos os alunos e os desenvolvimentos também serão diferentes. Assim, na aprendizagem da matemática, passa a ser fundamental ter em conta a vertente individual e a vertente social, ou seja o ensino terá de ter em conta a aprendizagem como um processo de construção activo individual e a aprendizagem como um processo activo de aculturação das práticas matemáticas a uma sociedade mais alargada (Yackel & Cobb, 1996). Nesta perspectiva, a proposta de tarefas de investigação pressupõe que o aluno interprete a proposta e desenvolva uma actividade

significativa de modo a estabelecer pontes com outras áreas do conhecimento, podendo atingir diferentes níveis de aprofundamento de conteúdos matemáticos, através de um processo individual mas em interacção com os diferentes actores da sala de aula. Esta perspectiva de ensino obriga o professor a mudar de atitude em relação à sua postura dentro da sala de aula.

As alterações verificam-se a vários níveis, por exemplo, nas situações de trabalho na aula, no apoio e orientação dados ao aluno, na avaliação, etc.... Para alguns autores, como Goldenberg (1999), o que importa é que o aluno aprenda a ser um investigador perspicaz, e para isso tem de fazer investigação. Mas Abrantes (1994) defende que para tal acontecer é necessário que os alunos tenham contacto com os métodos investigativos, o que só lhes pode ser possibilitado pelo professor. Daí que este seja um elemento fundamental na alteração das práticas lectivas e que seja necessário intervir ao nível da formação inicial e da formação continua dos docentes.

Ao nível do contexto da sala de aula, alguns investigadores deslocaram o seu foco de investigação para a actividade que os alunos desenvolvem ao executarem investigações e explorações matemáticas (Brocardo, 2002; Fonseca, 2000; Matos, 1991; Mendes, 1997; Segurado, 1997). Por exemplo, Matos (1991) investigou o conjunto de processos usados, pelos alunos, na resolução de problemas:

... um processo complexo que compreende diversos momentos: a exploração da situação, o reconhecimento da situação como problema, a formulação mais precisa do mesmo, a colocação em marcha de um conjunto de actividades para a resolução do mesmo, a frequente reestruturação das concepções implicadas no problema e a eventual obtenção de uma resposta para o problema. (p.46)

Segundo Mendes (1997), a actividade investigativa aparece como potenciadora do desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria aprendizagem e reforça a atitude de auto-avaliação exigida ao aluno, no seio do processo de ensino e aprendizagem. A não linearidade do processo de investigação e esta vertente auto-avaliativa permitem encarar a reflexão como constituinte do processo de investigação. A reflexão é uma forma de avaliar o trabalho desenvolvido para conseguir atingir a fase da prova ou o reformular de conjecturas e reorientar a exploração. Nesta actividade, os alunos deparam-se com dificuldades e raciocínios erróneos que emergem do próprio trabalho. Existe evidência de que as dificuldades e os erros sentidos pelos alunos podem ser de vários níveis, desde a compreensão da

proposta de trabalho até aos simples erros de cálculo que poderão afectar irremediavelmente a actividade de investigação. No sentido da sua identificação, o aluno perante a tarefa de investigação desenvolve um mecanismo de interacção crítica consigo próprio (Perrenoud, 1999), com os seus pares e com o professor, que o leva a interagir e a construir ou reconstruir o seu percurso de investigação.

Mas, também podemos considerar outros aspectos. Os alunos desenvolvem processos cognitivos diferentes em situações diferentes. No entanto, a intenção geral será encontrar o sucesso. Para que este aconteça é necessário que se efectue a reflexão no, e sobre, o trabalho desenvolvido. No mesmo sentido, o estudo de Fonseca (2000) aponta para que os alunos se envolvem mais profundamente nas investigações com o decorrer do tempo, tornando-se mais autónomos, passando a valorizar tanto as respostas como os processos usados. Para este conhecimento também contribui Mendes (1997) ao afirmar que os alunos conseguiram realizar com sucesso as investigações matemáticas, desenvolvendo actividades como manipular, experimentar, conjecturar, argumentar e provar.

Através do contacto com os métodos investigativos, os alunos desenvolvem capacidades de ordem superior, como a imaginação e a criatividade (Pires, 2002), necessárias para a resolução de diferentes problemas e para a investigação a vários níveis. Este tipo de trabalho é susceptível de ser desenvolvido em interacção entre alunos e entre alunos com o professor, enriquecendo e contribuindo para a construção de conhecimentos mais sólidos e duradouros. Vários autores referem-se, ainda, ao pensamento matemático avançado (Dreyfus, 1991; Tall, 1995). O sentido dado a este termo ganha importância porque os processos nele envolvidos têm correspondência com os processos envolvidos na actividade dos alunos ao abordarem investigações matemáticas. Para Dreyfus (1991), o pensamento matemático avançado consiste numa série de processos que interagem entre si, como representar, visualizar, generalizar, ou ainda, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. No caso de Tall (1995), o pensamento matemático avançado relaciona-se com a percepção de objectos do mundo exterior e a acção sobre esses mesmos objectos, o que desencadeia a construção de estruturas de conhecimento. Já Gray et al. (1999) afirmam que o pensamento matemático avançado se aplica aos estudantes quando se lhes apresenta definições e teoremas criados por outros e se lhes pede a construção de um conceito. Apesar de serem três perspectivas diferentes, uma que dá importância aos processos envolvidos e às suas interacções, outra à perspectiva da construção

matemática do conhecimento humano e a terceira à actividade que sustenta tal pensamento, todas elas ganham importância quando se procura saber os processos que os alunos desenvolvem nas investigações matemáticas.

A partir das perspectivas avançadas por Dreyfus (1991), Gray et al. (1999) e Tall (1995) sintetizo num esquema, apresentado na página seguinte, a minha interpretação da forma como os alunos atribuem significado à sua investigação matemática. Destaca-se a inclusão dos processos de construção do pensamento matemático avançado (Dreyfus, 1999) e a necessária reflexão sobre a actividade desenvolvida. Para mim, sem a inclusão do processo de reflexão na actividade, e sobre a actividade, torna-se difícil a elaboração de significado porque não se dá a compreensão dos conceitos envolvidos.

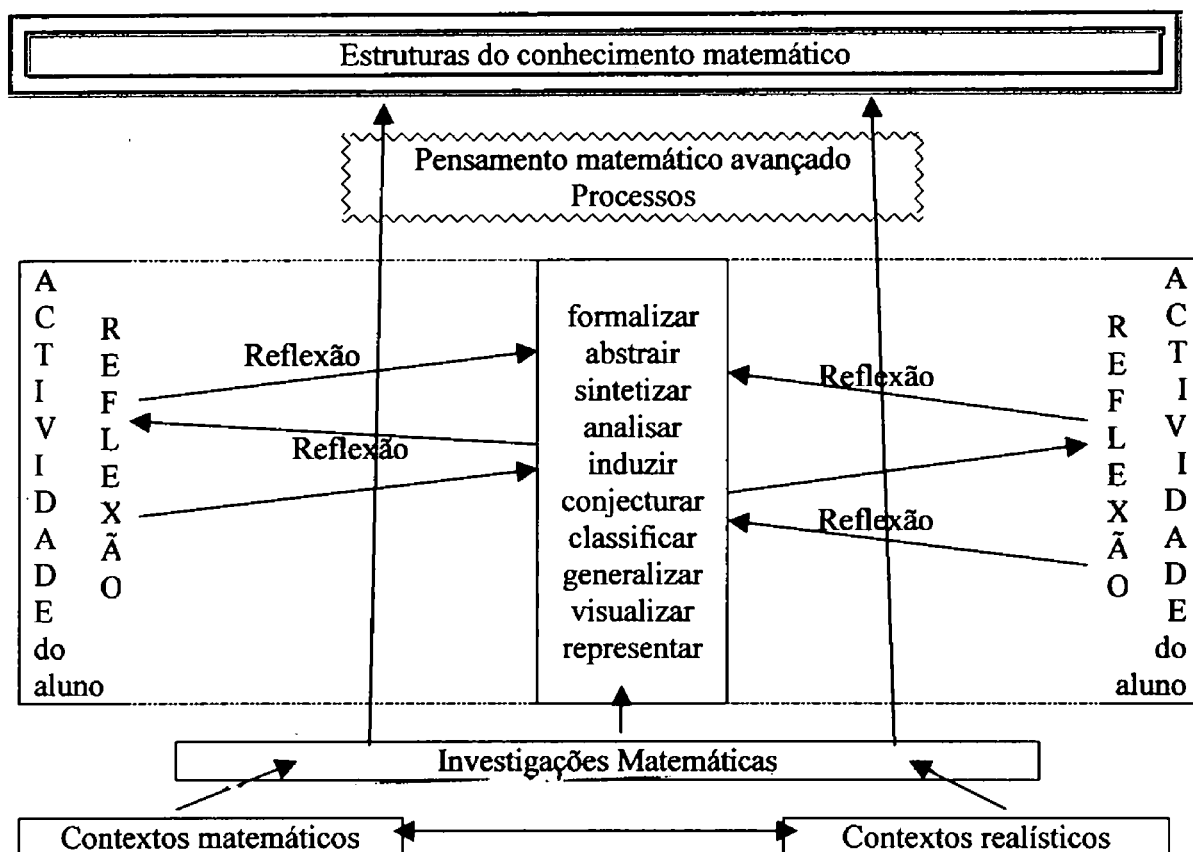
As investigações matemáticas podem situar-se em dois tipos de enquadramento, em contextos realísticos ou em contextos essencialmente matemáticos (Ponte, 2003). Na abordagem a uma investigação matemática o aluno desenvolve uma actividade, designada genericamente por actividade significativa. Na minha óptica, a actividade significativa é mais rica quando realizada através das investigações matemáticas, tendo em conta o contexto e os processos matemáticos mobilizados para o efeito. No desenvolvimento desta actividade, o aluno usa os processos matemáticos referidos por Dreyfus (1999), que fazem parte do pensamento matemático avançado, e a reflexão na actividade, e sobre a actividade desenvolvida.

A actividade é significativa para o aluno mas depende da tarefa proposta. Admitindo que a proposta poderá ter significado para o aluno ou não, outras componentes se poderão considerar para o sucesso da actividade. O conteúdo, o enquadramento, as suas componentes simbólicas, o modo de abordagem, os aspectos relacionais com o professor e com os seus pares são aspectos que devem ser considerados na atribuição de significado (Brun, 1986). A não imunidade relativamente à estimulação do exterior, de forma a desencadear a acção do próprio indivíduo, também foi identificada por Tall et al. (2001) na transição verificada na passagem do descrever para o definir e do convencer para o provar de uma maneira lógica baseada em definições.

Quando o aluno desenvolve esta actividade num contexto matemático situamo-nos na perspectiva de Gray et al. (1999). Por outro lado, se a actividade é desenvolvida num contexto realístico situamo-nos na perspectiva de Tall (1995). Quer num caso, quer noutro, o importante é que o aluno se envolva na realização de investigações matemáticas e experimente os processos matemáticos constituintes do pensamento

matemático avançado. Com a sua vivência, pretende-se que o aluno os desenvolva, os descubra e os aplique de forma a ficar dotado com as estruturas do conhecimento matemático, através da auto-avaliação das suas competências. Observemos a figura:

Figura 2 - Processos envolvidos na actividade de investigação matemática.



Para Ponte (2003), os estudos realizados mostram que, para muitos alunos, as actividades de investigação constituem uma experiência nova e que com a continuação do trabalho, referindo-se a alunos do 2º ciclo, conseguem compreender o que é uma investigação e o papel que lhes cabe assumir nesta actividade. Num género de aulas em que as investigações matemáticas são dominantes, os alunos depararam-se com alguns tipos de dificuldades. Como é referido por Brocardo (2002), os alunos realizam as investigações de forma não linear, passando da recolha de dados para a formulação de conclusões. Esta dificuldade surge da aplicação das estratégias de resolução de exercícios à realização de investigações, ao não domínio dos processos que caracterizam a investigação matemática e ao pouco tempo dedicado a este tipo de actividade no ensino da matemática. Por outro lado, a realização de algumas experiências é entendida

como a confirmação de uma propriedade ou de uma conjectura. Esta dificuldade que está relacionada com o trabalho investigativo tende a ser ultrapassada com a continuidade deste tipo de actividade. No entanto, é de salientar que existe evidência (Segurado, 2002) que ao longo do tempo os alunos desenvolvem a capacidade de observar, estabelecer relações, conjecturar, testar e argumentar, mostrando inclusive criatividade. É de referir que também Segurado (1997) afirma que a realização de investigações provoca a mudança de concepções em relação à matemática, verificando-se uma mudança pela maior autonomia no trabalho e pela valorização e reconhecimento das interacções entre pares.

Existem outros investigadores que analisaram a evolução do trabalho dos alunos nas actividades de investigação. Por exemplo, Rocha (2002a) analisou o desempenho dos alunos nas diferentes etapas do processo investigativo e concluiu que com o desenrolar do trabalho os alunos conseguiram um maior domínio de certos processos matemáticos inerentes à actividade de investigação.

Se por um lado é natural que este tipo de trabalho proporcione aos alunos uma maior autonomia, por outro lado é necessário dar atenção ao papel do professor. Fonseca (2000) refere-se ao papel do professor na orientação dos alunos sem lhes reduzir a atitude investigativa. Para esta investigadora, é pedagogicamente difícil porque é necessário decidir quando intervir, como intervir, que sugestões dar a cada aluno ou a cada grupo sempre que surge uma situação de impasse e como gerir o tempo necessário para as tarefas. Qualquer que seja a decisão do professor o importante é que este seja um mediador na relação pedagógica (Barth, 1993).

Síntese do capítulo

As investigações matemáticas são experiências de aprendizagem a desenvolver na sala de aula de Matemática em paralelo com outras. Geralmente, não são muito utilizadas, mas as suas potencialidades têm vindo a ser estudadas pela comunidade de educadores matemáticos (Abrantes et al., 1999b; Ponte, 2003; Santos et al., 2002). Pretende-se dar-lhes a visibilidade e o destaque necessários à sua implementação nas práticas correntes da sala de aula.

Os estudos realizados evidenciam que os alunos ao realizarem investigações matemáticas estão a reforçar as suas competências e capacidades aos mais variados níveis. O trabalho com actividades de investigação permite a vivência dos processos que

caracterizam a matemática e a investigação matemática realizada pelos matemáticos profissionais. Acredita-se que esta vivência traz vantagens para a aprendizagem da matemática, uma vez que os processos matemáticos envolvidos são inerentes à própria matemática (Mason, Burton & Stacey, 1982; Schonfeld, 1991, 1999; Tall, 1995; Dreyfus, 1999; Fonseca, 2002; Ponte, 2003). Na prática, o aluno ao experimentar a realização de diversas investigações evolui no sentido de reforçar a capacidade de raciocinar logicamente, de formular e testar conjecturas, de analisar contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações. É neste pressuposto que se preconiza a continuidade na realização de estudos científicos sobre a integração das investigações matemáticas no currículo e na avaliação.

Ao nível curricular, desde da década de 80 que têm sido redigidos diversos documentos sobre a possibilidade de integração desta metodologia de ensino nos programas de matemática (Abrantes et al., 1997b; APM, 1988; NCTM, 1991; Stanic & Kilpatrick, 1989). Nas sucessivas reformas dos programas de Matemática para o ensino secundário, acontecidas em 1991, 1997, 2004, também tem sido crescente a importância dada a este tipo de situação de trabalho. Começou com a inclusão de tópicos de resolução de problemas em 1991 e, nos actuais programas, entrados em vigor em Setembro de 2004, as actividades de investigação são reconhecidas como um tema transversal a desenvolver em todos os temas matemáticos.

Assim, o argumento da inclusão curricular visa combater o insucesso verificado nesta disciplina, uma vez que existe evidência de que os alunos, ao realizarem investigações matemáticas, viverem os processos característicos da investigação feita pelos matemáticos profissionais. O aluno aprende como investigador e, assim, ao ser envolvido num processo de pequenos avanços e recuos, torna-se mais autónomo e gestor das suas próprias aprendizagens, auto-regulador.

A discussão acerca da integração das investigações matemáticas nas experiências de aprendizagem dos alunos tem ainda sentido quando se discute a atitude que se preconiza relativamente à ciência. Procura-se que os alunos sejam envolvidos na perspectiva do saber matemática através de um paradigma de ensino que inclui o processo pessoal e autónomo de construção dos conhecimentos, dos erros, das dificuldades e do experimentar, o avançar e recuar. Só assim é possível entender o saber matemática como o fazer matemática. Aceita-se que a perspectiva amplamente difundida nos dias de hoje seja a do saber matemática como sinónimo de desenvolvimento do poder matemático, coerente com o domínio das capacidades de

explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, resolver problemas, comunicar e estabelecer conexões em Matemática, e ainda a perseverança, curiosidade e interesse ao fazer matemática.

As actividades de investigação, quando proporcionadas aos alunos, possibilitam os vários pontos de entrada para a abordagem diversificada e individual de fazer matemática e para o desenvolvimento de uma atitude questionadora sobre aquilo que se desenvolve e sobre a forma como é feito. É inegável que as diferentes fases do processo investigativo, referidas por vários educadores matemáticos, também são as fases identificativas do trabalho dos matemáticos. Salvaguarda-se que, ao nível da experiência matemática dos alunos, as actividades de investigação possibilitam a vivência dos processos característicos da matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que as demonstrem e resistam a sucessivos testes.

O aprender a investigar, ou no caso da matemática saber matemática é fazer matemática, é um trabalho de continuação e de persistência em que o objectivo principal é desenvolver capacidades de ordem superior. A partir de contextos matemáticos ou de contextos realísticos, o aluno tem a oportunidade de usar os processos característicos do pensamento matemático avançado e assim criar as suas estruturas do conhecimento matemático. A série de processos, que segundo Dreyfus (1999) interagem entre si, representar, visualizar, generalizar, ou ainda, classificar, conjecturar, induzir, analisar sintetizar, abstrair ou formalizar não existem como uma capacidade inata. É do contacto com as investigações matemáticas, no ziguezaguear da exploração, através de sucessivas reflexões e avaliações do trabalho desenvolvido, na busca da continuação desse trabalho e nos confrontos realizados que os significados vão surgindo e que a competência de usar os referidos processos matemáticos se vai consolidando. Trata-se de um sistema de interacção crítica do aluno com a sua própria actividade, que exige uma atitude activa, autónoma e reflexiva de forma a validar aprendizagens e a favorecer a tomada de consciência do que é necessário fazer para atingir um determinado objectivo. Neste pressuposto, o aluno confronta os seus conhecimentos, capacidades e atitudes, na necessidade de dar resposta a uma situação nova e procura mobilizar as interacções possíveis. Assim, o aluno constrói efectivamente as suas competências de forma a tornarem-se duradouras e aplicáveis noutras situações.

Nas diferentes fases das investigações matemáticas existe uma grande dose de avaliação reguladora. É através da reflexão, da auto-avaliação e das interacções, nas diferentes etapas do trabalho investigativo, que o aluno valida ou não os conhecimentos

e estabelece os percursos de continuação. As dificuldades e os erros são uma constante neste percurso e é através da sua tomada de consciência que a investigação toma rumo com o objectivo do sucesso.

Na aula de matemática, esta abordagem traz necessariamente a alteração dos papéis do professor e do aluno. É necessário que o aluno assuma o seu papel de intervenção e construção da sua própria aprendizagem. Ao professor cabe um novo papel, o de ser mediador entre o aluno e as situações de aprendizagem criadas. O professor estabelece o ponto de partida. Daí que seja importante a selecção das tarefas a propor aos alunos, e a forma como são colocadas.

As tarefas são a ponte para que o aluno estabeleça caminhos, coloque questões e defina um percurso de exploração. O professor terá de olhar para o trabalho realizado numa perspectiva formativa, em que se procura saber como as coisas estão e o que se poderá fazer para aperfeiçoá-las. Esta reflexão conjunta permite a ambos, professor e aluno, a percepção de onde se está e o que é necessário fazer para avançar.

CAPÍTULO III METODOLOGIA

O método de investigação

Para fazer a abordagem da problemática da avaliação reguladora, na perspectiva dos alunos, foi escolhida uma metodologia de natureza qualitativa. Esta opção prendeu-se directamente com o propósito da investigação, a saber, analisar e compreender que tipo de processos desenvolvidos pelos alunos podem contribuir para ajudá-los a ultrapassar dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos num contexto de actividade de investigação matemática. Lessard-Hébert, Goyette & Boutin (1994) referem que este tipo de metodologia é a adequada para a compreensão dos problemas do ensino. A escolha da abordagem qualitativa, também, esteve relacionada com as cinco características referidas em Bogdan e Biklen (1994) como identificativas deste tipo de estudos. Passo a estabelecer a relação entre este estudo e cada uma destas características:

1. Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, sendo que o investigador é o instrumento principal de recolha de dados. Com efeito, os dados recolhidos em ambiente natural são importantes para este estudo uma vez que é perante a actividade de investigação que o aluno desenvolverá um mecanismo de interacção crítica consigo próprio, com os seus pares e com o professor, que o levará a construir ou reconstruir o seu percurso de aprendizagem. Como professor da turma e investigador fiquei encarregue de ser o principal instrumento de recolha de dados sobre o objecto de estudo que foram os alunos. Apesar de também recorrer a instrumentos de áudio e vídeo não é dispensável como fonte de dados o ambiente natural, pois a recolha directa de informação em aula contribuiu para que as acções fossem melhor compreendidas quando confrontadas com as visões e perspectivas dos seus actores.

2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos neste estudo dizem respeito ao comportamento de quatro alunos, observados em situações diferentes. Para a compreensão do significado dos dados obtidos, estes foram recolhidos na forma de palavras e não de números dando origem a uma investigação com resultados escritos, contendo citações com base nos dados para ilustrar a construção de uma visão sobre a problemática investigada. Deste modo emergiu uma apresentação dos resultados rica em pormenores descritivos.

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Como já foi referido, neste estudo pretendi que o aluno encarasse as actividades de investigação como oportunidades de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente. Foi mais importante conhecer o tipo de processos a que desenvolve o aluno nas investigações matemáticas, o tipo de recursos que o aluno utiliza quando sente dificuldades e como as usa, a função do erro na concretização da tarefa, a reflexão sobre o processo desenvolvido, do que conhecer as dificuldades, os erros e os obstáculos surgidos. Configurou-se assim um privilegiar do processo em detrimento dos produtos ou resultados.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Procurei neste estudo, através da análise dos dados, inferir os factores de diferenciação na aquisição de conhecimentos matemáticos no decurso de uma actividade de investigação. Foi da observação de comportamentos (Fortin, 2000) e interacções de êxito, e não esquecendo a importância esperada da reflexão sobre a actividade desenvolvida para a concretização das tarefas, que surgiu uma verdadeira avaliação formativa. Assim, não pretendi estudar uma hipótese previamente estabelecida mas sim a construção de novo conhecimento, ou de uma nova visão, que poderá contribuir para o estabelecimento de uma sólida teoria de avaliação formativa.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. O significado atribuído pelos alunos participantes (Erickson, 1986) neste estudo ao modelo de avaliação reguladora assumiu maior relevância quando pretendi estudar a estratégia geral de acção perante a tarefa, a capacidade de integrar informações fornecidas pela tarefa nos seus esquemas de acção, a capacidade de reorientação perante as interacções estabelecidas, o papel do erro e a capacidade reflexiva de modo a proporcionar o conhecimento e a compreensão das suas atitudes e opções.

Ao nível do design de investigação recorri ao estudo de caso porque não pretendi ter controle sobre os acontecimentos e não foi possível nem desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (Yin, 2002). O recurso ao estudo de caso prendeu-se também com as características específicas de cada aluno, únicas em muitos aspectos. Procurei, assim, identificar o essencial e o mais característico de cada caso, pelo que foi necessário identificar o seu carácter único e delimitá-lo (Goetz, J. e Lecompte, 1984). Por outro lado, o design de estudo de caso fundamentou-se na análise de três aspectos propostos por Yin (2002):

1. O tipo de questões do estudo. Neste estudo procurou-se, por exemplo, compreender a que tipo de recursos apela o aluno para dar resposta às dificuldades. Ora, esta é uma questão particular que está relacionada com aspectos comportamentais de um indivíduo. Na análise dos dados e na construção de conhecimento tive em conta o ponto de vista do aluno. No entanto, tanto a análise como os conhecimentos emergentes deste estudo resultam da minha interpretação.

2. O grau de controlo que o investigador tem sobre as variáveis ou acontecimentos. Tendo sido feita a recolha de dados em ambiente natural, como investigador não tive controlo sobre os acontecimentos e estive fortemente dependente do trabalho de campo, recorrendo assim a múltiplas formas de recolha de dados como entrevistas, observações, documentos, reflexões e Diário de bordo.

3. O foco situar-se ou não em acontecimentos que ocorrem no momento do estudo. O nível de compreensão que pretendi atingir não se encontrava restringido a um conjunto de variáveis controladas para o efeito.

Os aspectos referidos são coerentes com a metodologia qualitativa. No entanto, é de salientar o facto de eu ser simultaneamente o professor da turma e o investigador (Alarcão, 2001) interessado em desenvolver este estudo. O assumir a postura de participante, poderia acarretar conflitos para o estudo de caso, o que não aconteceu, pois como professor ao mesmo tempo que foquei a minha atenção no processo de ensino e aprendizagem, reflecti e procurei conhecer os processos, dinâmicas e perspectivas (dos alunos) envolvidos na avaliação reguladora. Também têm sido discutidos os requisitos mínimos para que a actividade de investigação do professor possa ser considerada uma investigação (Beillerot, 2001). Segundo Ponte (2002a), os requisitos (i) produzir conhecimentos novos, (ii) ter uma metodologia rigorosa e (iii) ser pública, aplicam-se à investigação que os professores realizam sobre a sua prática. Daí a considerar possível a dicotomia professor – investigador (Carrillo, 2002).

A concluir é ainda de referir que neste estudo, o design de estudo de caso foi desenvolvido no quadro do paradigma interpretativo (Merriam, 1988). Coerente com a investigação qualitativa, este paradigma encontrou-se fundamentado na perspectiva de que a actividade humana é uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado (Garnica, 1999). Procurou-se conhecer a realidade como ela é vista pelos seus diversos actores, ganhou importância a compreensão dos fenómenos comportamentais que puderam ser observados. Com este paradigma, foi possível

analisar os dados no sentido da compreensão das interacções e dos processos desenvolvidos para o desencadear da avaliação reguladora.

Uma reflexão sobre a minha prática

Para iniciar este ponto, é necessário pensar sobre os motivos que me levaram a procurar uma especialização na área da didáctica da matemática. Entre os factores que me impulsionaram a procurar essa especialização encontra-se a importância que assume para mim interrogar a minha prática. Em que medida as minhas práticas avaliativas influenciam o percurso dos alunos do ensino secundário? Que poderei eu fazer para valorizar os conhecimentos, capacidades e atitudes que os alunos adquirem ao longo do seu percurso escolar? Quais são os aspectos que afectam a aprendizagem dos alunos? Que erros cometem? Quais são as suas dificuldades? Como as podem ultrapassar? Estas são questões sobre as quais fui reflectindo e para a sua resposta procurei contribuir ao desenvolver este estudo.

Ao colocar em causa estes aspectos da minha prática que me incentivaram na procura de explicações e mudança, resolvi desenvolver um estudo baseado numa reflexão sobre a minha própria prática (Oliveira, 1999). Para me situar num contexto de investigador sobre a prática, neste caso, a minha, não poderei deixar de citar Oliveira & Serrazina (2002): “uma prática reflexiva confere poderes aos professores e proporciona oportunidades para o seu desenvolvimento” (p.29). Ora, é neste contexto que vou fundamentar a minha opção pelo estudo dos meus alunos. É através das minhas preocupações enquanto professor que procuro saber mais sobre os processos utilizados pelos meus alunos na sua aprendizagem (D’Ambrósio, 1994b).

Ao investigar sobre a prática procurei compreender a natureza dos problemas que afectam a avaliação formativa nas aprendizagens dos meus alunos, no sentido de levar a uma intervenção fundamentada na prática, através da alteração dos processos de ensino e de aprendizagem. Colocavam-se-me os objectivos definidos por Ponte (2002a) para a investigação sobre a prática. Este autor refere como objectivos principais: (1) a alteração de um aspecto da prática, estabelecida a necessidade de mudança; e (2) a compreensão da natureza dos problemas que afectam a prática com vista a uma estratégia de acção.

Segundo Zeichner (1993) a prática reflexiva constitui uma contribuição para o reconhecimento da riqueza das práticas dos bons professores, os que buscam um ensino de qualidade. A importância do conhecimento produzido pelos professores encontra

também fundamento em Alarcão (1996), quando refere que os professores desempenham um importante papel na produção e estruturação do conhecimento pedagógico, porque reflectem de uma forma situada, na e sobre a interacção entre a pessoa do professor e a pessoa do aluno, entre a instituição escola e a sociedade em geral. Outro aspecto a considerar é a autonomia do professor (Gimeno-Sacristón, 1998) em relação a instituições exteriores à escola. A reflexão, também, significa o reconhecimento que a produção de conhecimento sobre o que é um ensino de qualidade não é propriedade exclusiva das universidades e centros de investigação e desenvolvimento e que os professores também têm teorias que podem contribuir para uma base codificada de conhecimentos de ensino (Zeichner, 1993).

Com a definição metodológica que conduz à elaboração deste estudo, procurei investigar para aumentar o conhecimento académico na área da avaliação tendo o cuidado de não confundir a investigação sobre a prática e a minha prática reflexiva. O facto deste estudo fazer sentido para a comunidade em que me insiro, contribuir para o conhecimento da problemática da avaliação das aprendizagens, permitir o adequado distanciamento entre a análise de professor e de investigador acerca do objecto em estudo (os alunos), procurar soluções para os problemas com que me confronto, permite rebater algumas das críticas à investigação sobre a prática feitas por Cochran-Smith e Lytle (1999), citados em Ponte (2002a). As autoras sintetizam as críticas à investigação sobre a prática em três grandes grupos respeitantes: (1) ao conhecimento gerado, (2) aos métodos e (3) aos fins dessa investigação.

Na prática, para poder delinear esta investigação foi necessário preparar as seguintes etapas (Ponte, 2002a): (1) formulação do problema e das questões do estudo; (2) recolha dos elementos que permitem responder a este problema; (3) interpretação da informação recolhida com vista a tirar conclusões; e (4) a divulgação dos resultados e conclusões obtidas.

A emergência do problema e das questões de estudo deu-se na tomada de consciência de que a forma de agir e as decisões ao nível da sala de aula eram regidas por teorias pessoais (Argyris e Shön, 1974; Zeichner, 1993). Nesta consciencialização, assumi no processo de ensino e aprendizagem e na recolha de dados, a atitude de um professor reflexivo, capaz de enfrentar e analisar os dilemas que se colocam na sua actividade, de assumir os seus valores, de estar atento aos contextos culturais e institucionais, envolvendo-me na mudança e tornando-me agente do meu próprio desenvolvimento profissional (Zeichner & Liston, 1996).

O desenvolvimento profissional preconizado por Schön (1987) também se baseia na noção de pesquisa e experimentação na prática. O autor refere-se às competências que os profissionais revelam em situações caracterizadas por serem únicas, incertas e de conflito. Aspectos caracterizadores do processo de ensino e aprendizagem.

É importante referir que, no contexto educativo actual, ocorre a utilização indiscriminada do conceito de reflexão (Garcia, 1992), por isso é necessário referir o que o mesmo significa para mim. Reflectir é ser capaz de despoletar acção (Zeichner, 1993), e como tal, o prático reflexivo a que me reporto é aquele que é capaz de introduzir mudanças nas suas práticas (Serrazina & Oliveira, 2002), que aceita correr riscos, que tem a humildade de aprender com os alunos, tem a abertura de espírito necessária para aceitar que os seus pontos de vista e as suas propostas nem sempre são as melhores. Sendo, também, a atitude reflexiva um acto consciente e autónomo (Alarcão, 1996).

Para Dewey (1933) existem outros valores igualmente importantes. O envolvimento em prática reflexiva implica uma atitude do professor caracterizada por abertura de espírito, responsabilidade e empenhamento. É que a verdadeira prática reflexiva ocorre quando uma pessoa tem um problema real para resolver e a investigação vai no sentido de procurar a solução. Ao investigar a sua prática o professor reflexivo aumenta o seu conhecimento profissional na medida em que consegue explicar diferentes aspectos do seu conhecimento tácito (Oliveira & Serrazina, 2002).

Como forma de eliminar as questões de ordem epistemológica, sobre a natureza deste tipo de conhecimento, o investigador deverá definir rigorosamente os aspectos metodológicos da sua investigação. No trabalho de campo, a opção metodológica deste estudo recaiu na recolha de dados qualitativos, o que se pautou por um alinhamento constante, sistemático e rigoroso que se descreve mais à frente neste capítulo. Desde a selecção dos participantes, ao plano de recolha de dados, à escolha dos instrumentos de recolha de dados e à forma como os mesmos foram registados e tratados, todo o processo foi planeado, calendarizado e teve em vista os objectivos visados nas actividades programadas, de forma a possibilitar a minha interpretação.

Participantes

Para compreender a prática de avaliação reguladora, no ensino secundário, procurei uma turma deste ciclo que não estivesse sujeita a constrangimentos de ordem

externa. Isto é, que não estivesse sujeita a uma avaliação externa. A minha opção por uma turma de 10º ano, carácter geral, do primeiro agrupamento, esteve relacionada com a não realização de exames ou provas globais no 10º ano e com a implementação dos novos programas de Matemática - A ao 10º ano, no ano lectivo 2003/2004 com a designação de Matemática.

Como eu estou colocado numa escola secundária da margem sul do Tejo, no momento de escolha de horários, coloquei ao departamento curricular de matemática a minha necessidade de desenvolver este estudo e para tal precisar de uma turma do 1º agrupamento – carácter geral. A turma que me foi atribuída preencheu os requisitos colocados. Era constituída por 25 alunos, sendo 13 raparigas e 12 rapazes. Relativamente às idades, a média no início do ano lectivo era de 15 anos, embora se distribuíssem da seguinte forma: 14 anos, duas raparigas e um rapaz; 15 anos, 8 raparigas e 10 rapazes; 16 anos, 3 raparigas; 17 anos, um rapaz.

Todos os alunos estavam no 10º ano pela primeira vez. Embora, alguns tivessem situações de repetência no seu percurso escolar, essa situação não se verificava no 10º ano.

No primeiro dia de aulas, preencheram a ficha informativa em uso na escola que solicitava dados informativos e questões gerais relativamente às disciplinas e ao prosseguimento de estudos. No que diz respeito à Matemática, quando confrontados com a questão opinião/expectativas em relação à disciplina manifestaram cepticismo e contenção, como se pode verificar pelas afirmações: “espero aprender”, “espero manter o gosto pela disciplina”, “ultrapassar as dificuldades”. Relativamente à escola, indicaram como profissões desejadas: médico, médico veterinário, farmacêutico, biólogo, engenheiro agrónomo, entre outras de nível superior.

As habilitações dos pais situavam-se entre a quarta classe e o curso médio/superior, dois alunos indicaram a quarta classe para ambos os pais e um indicou apenas para a mãe, outros dois alunos indicaram ambos os pais com curso médio/superior e cinco indicaram apenas a mães como detentoras desse nível de habilitação. Os restantes situam-se ao nível do terceiro ciclo da educação básica.

Para o estudo de caso foram seleccionados quatro alunos. Este número teve por objectivo garantir a diversidade de aspectos relacionados com a diversidade das tarefas propostas. Uma vez que analisei e observei (Romberg, 1992) os comportamentos durante um processo de aprendizagem que envolveu tarefas de investigação num contexto de avaliação formativa, tive em atenção como critérios de selecção, os alunos:

1. Terem facilidade de comunicação, pois seriam bons informantes sobre os processos desenvolvidos na concretização das tarefas (NCTM, 1994);
2. Demonstrarem apetência ou capacidade de reflexão desenvolvida, para poder questionar e repensar sobre o trabalho desenvolvido durante a sua actividade (Løster, 1993);
3. Reconhecerem o valor educativo das tarefas de investigação no seu percurso escolar, demonstrando assim uma atitude positiva face às mesmas (APM, 1988);
4. Serem de sexos diferentes, recorrendo a dois alunos do sexo masculino e dois do sexo feminino (Gipps, 1999);
5. Terem estatutos escolares diferentes, sendo seleccionados em cada género um “bom” aluno e outro “razoável”.

Nesta investigação, não foi importante estabelecer relações entre a diversidade de características encontradas nos alunos, mas fez sentido considerá-las como factor de selecção para objecto de recolha de dados. Embora não pressuponha uma relação de causa efeito entre as características dos alunos e os processos de avaliação reguladora que desenvolvem, deverá ser salvaguardado que determinada característica poderá vir a influenciar o desempenho de cada um e cada aluno é caracterizado pelas características que o distingue e o particulariza como um caso.

Os quatro alunos seleccionados para este estudo são o André, o Lourenço, a Marta e a Rita. Todos eles se encontravam a frequentar o 10º ano pela primeira vez. O André é um aluno caracterizado por demonstrar pouco envolvimento nas actividades propostas para trabalho de casa. Também não demonstra tomar a iniciativa em realizar trabalhos autonomamente, sem que tenham sido solicitados pelo professor. No entanto, em aula, é um aluno participativo, interveniente e envolvido nas actividades propostas, procurando esclarecer as suas dúvidas e explicar os seus pontos de vista. O Lourenço é um aluno que tem por objectivo o prosseguimento de estudos, pelo que atribui um significado muito grande à escola e em particular à Matemática. É um aluno que tem desenvolvido uma forte atitude crítica relativamente ao seu trabalho. Este aspecto permite-me realçar a forma como enfrenta os problemas e as dificuldades encontradas no decurso das tarefas propostas. O Lourenço, perante uma dificuldade, procura ultrapassá-la por diferentes caminhos, explorando diferentes alternativas, buscando interacções ou recursos adequados à situação, mas nunca desiste. A Marta é uma aluna que evidência dificuldades ao nível da compreensão, no entanto é uma lutadora. Ela procurou ultrapassar as dificuldades e os seus erros e incompreensões através do

estabelecimento de interacções sistemáticas com os colegas ou comigo. Avança e recua muito, mas a sua organização e programação do trabalho a realizar permite-lhe atingir um “razoável” nível de sucesso. A Rita é a melhor aluna da turma ao nível das classificações na generalidade das disciplinas. No caso da Matemática, também é uma aluna que atingiu um bom nível de desenvolvimento. É uma aluna com um ritmo de trabalho muito bom, o que lhe permite acompanhar as aulas, intervir, questionar e colocar dúvidas, procurando dar significado aos conteúdos estudados. Ao nível da comunicação oral e escrita expressa-se muito bem, esforçando-se por utilizar a linguagem formal da matemática.

O trabalho de campo

Para elaboração de uma estratégia de avaliação reguladora situei-me num quadro conceptual onde foi necessário definir:

1. os aspectos da aprendizagem do aluno a observar e os processos a utilizar na recolha de informação;
2. os princípios que deviam orientar a interpretação dos dados e o diagnóstico das situações encontradas;
3. os caminhos a seguir nas actividades de ensino e aprendizagem.

Na concretização deste estudo, tinha por objectivo procurar intervir no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem através do apelo sistemático e contínuo para uma atitude reflexiva que conduzisse à avaliação reguladora. Como referem Bishop & Goffree (1986), a aprendizagem não resulta unicamente da actividade, mas sobretudo da reflexão sobre a actividade. A minha intervenção foi orientada pela reacção dos alunos e pelas solicitações que me colocavam.

Ao nível da recolha de informação situei a minha atenção sobre as informações relativas aos processos de aprendizagem desenvolvidos na sala de aula (Ponte, 1992), enquanto evoluíam na actividade de investigação. Os dados a recolher diziam respeito às representações explicitadas pelo aluno e às estratégias ou processos que utilizam para obter êxito. Foram tidos em conta os erros como sendo naturais no processo de ensino e aprendizagem e reveladores da natureza das representações ou das estratégias seguidas (Veslin & Veslin, 1994). Adoptando um estilo de investigação denominado naturalista (Bogdan & Biklen, 1994) procurei que os alunos desenvolvessem os seus processos de forma natural e sem constrangimentos. No decorrer da investigação, e com o intuito de recolher os dados, coloquei os alunos perante tarefas de investigação,

integradas no normal decurso do processo de ensino, as quais tiveram o duplo papel de aprender e avaliar. Aprender no sentido de construir novos conhecimentos, desenvolver novas capacidades, dotar os alunos de novas ferramentas. Avaliar no sentido de levar o aluno a reflectir sobre aquilo que não sabe em determinado conteúdo ou aquilo que terá que aprofundar para enriquecer os seus conhecimentos. A intenção era integrar a avaliação no processo de ensino e aprendizagem (Kilpatrick, 1998), identificar, nos alunos, o tipo de recursos que mobilizam para dar resposta às dificuldades, identificar as interacções susceptíveis de ajudar o aluno a reorientar o seu trabalho, definir o significado do erro para concretização da tarefa e identificar de que modo o aluno reflecte sobre o processo desenvolvido e reorienta o seu trabalho com vista ao sucesso.

Foram realizadas quatro tarefas de investigação, duas de geometria e duas de funções, todas realizadas em trabalho de grupo, com um número que variou de dois a quatro elementos, os alunos tiveram a possibilidade de interagir, discutir e reflectir.

Instrumentos de recolha de dados

Para proceder à recolha de dados foram usadas as técnicas próprias da investigação qualitativa (Denzin, 2003), como: a entrevista, a grelha de observação, o Diário de bordo, os relatórios produzidos e a reflexão escrita dos alunos. O uso de instrumentos de diferentes tipos permitiu obter informação diversificada, permitindo posteriormente, cruzar a informação obtida em cada um dos instrumentos. Com cada instrumento procurou-se dar resposta a uma ou mais questões do estudo (Quadro 2).

Quadro 2 – Plano de obtenção de resposta às questões do estudo e cruzamento de dados.

	Entrevista	Observação de aula Registo áudio e vídeo Grelha de observação		“diário de bordo”	Relatórios produzidos pelos alunos	Reflexão escrita do aluno
Qual o tipo de processos que o aluno desenvolve quando se confronta com uma investigação matemática?		x	x		x	x
Qual o tipo de recursos que o aluno procura quando sente dificuldades e como os usa?		x	x	x		x
Qual a função atribuída aos erros para na concretização da tarefa?	x	x	x			x
De que modo o aluno reflecte sobre o processo desenvolvido e reorienta o seu trabalho com vista ao sucesso?	x		x	x	x	x
Caracterização do aluno	x		x			

A entrevista

A entrevista foi o primeiro instrumento de recolha de dados a ser aplicado. A partir da entrevista procurei obter dados sobre a visão que os alunos têm da matemática e do processo de ensino e aprendizagem em geral, permitindo-me formar uma ideia intuitiva acerca de como os alunos interpretam diferentes aspectos da sua vivência (Bogdan & Biklen, 1994). Para aceder à perspectiva que cada aluno tem do processo de ensino e aprendizagem e do uso que faz da avaliação no processo de investigação em matemática foi importante captar o discurso do aluno e permitir-lhe expressar as suas opiniões nos seus próprios termos de forma a facilitar a minha captação das suas experiências e visões.

Na investigação qualitativa frequentemente usam-se entrevistas não-estruturadas e semi-estruturadas. Neste estudo, escolhi a entrevista semi-estruturada (Fontana & Frey, 1994) uma vez que possibilitava a introdução de novas questões ou eliminação de outras de forma a obter uma informação completa sobre os aspectos fundamentais para a problemática do estudo, para além de propiciar um ambiente natural ao desenvolvimento da entrevista. Para tal, elaborei um guião de suporte às entrevistas (anexo I).

Neste trabalho foi realizada apenas uma entrevista a cada aluno (caso) com o objectivo de aprofundar o conhecimento sobre o aluno, a sua vivência com a matemática e com a avaliação, a sua postura sobre o papel do erro e a reflexão sobre o processo de aprendizagem. Para a realização deste trabalho, decidi pela não realização de outras entrevistas, uma vez que a compreensão da problemática deste estudo surgiria da aplicação de outros instrumentos e que a função da entrevista era ajudar-me a “desbravar”, inicialmente, esta problemática (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994). Cada entrevista foi áudio-gravada e posteriormente, por mim, transcrita na sua globalidade.

A observação de aulas

Para a realização deste estudo foi fundamental a minha postura de professor como observador participante. Tomando uma atitude não directiva, como professor tive de sugerir aos alunos pistas para a ultrapassagem de obstáculos, sugestões de materiais ou de exploração das tarefas de investigação, sem contudo ter a intenção de indicar um caminho correcto. Como investigador procurei registar numa grelha de observação de aulas, os aspectos mais significativos que ocorreram com os alunos (casos) durante a

aula. Para tal, elaborei uma grelha para os registos de observação (anexo II). Nesta grelha registei os aspectos mais diversificados que ocorreram durante a actividade de investigação. O significado atribuído a cada registo efectuado seria compreendido mais tarde, através da gravação dos discursos dos alunos e da verificação da eficácia das interacções estabelecidas. Para a gravação do que os alunos iam dizendo ao longo da actividade de investigação, das interacções estabelecidas e dos avanços e recuos verificados foi usado um gravador por aluno, em todas as aulas de recolha de dados. As gravações foram posteriormente, por mim, transcritas na globalidade. Na totalidade foram áudio-gravadas 8 aulas de 50 minutos que se distribuem da seguinte forma:

Quadro 3 – Concretização das aulas gravadas

Tarefa	1ª aula de investigação	2ª aula de investigação
<i>Unindo os pontos médios de um quadrilátero</i>	Gravação dos 4 alunos.	Gravação dos 4 alunos.
<i>Pavimentações</i>	Gravação de 2 alunos por turno.	Gravação dos 4 alunos.
<i>Zeros de uma função polinomial</i>	Gravação dos 4 alunos.	Gravação dos 4 alunos.
<i>Uma investigação com funções cúbicas</i>	Gravação de 2 alunos por turno.	Gravação dos 4 alunos.

O diário de bordo

Perante a natureza de uma investigação como esta, surgiu a necessidade de registar todas as notas sobre a observação feita durante a realização da tarefa:

[O Investigador] anota também textualmente as conversas dos actores observados. Estes relatos descritivos vão constituir a informação sobre o local no qual evoluem os actores, bem como a sua percepção da situação que eles vivem, das suas expectativas e das suas necessidades. (Lessard-Hébert, Goyette et Boutin, 1994, p.158)

O registo neste diário foi feito após as aulas de aplicação das tarefas de investigação. Nele registei as minhas intervenções, as causas das mesmas e os seus efeitos percebidos. Também foram registadas as alterações à planificação estabelecida inicialmente, as alterações metodológicas à concretização da aula e as opções tomadas no seu decurso e estratégias, reacções e dificuldades ou episódios marcantes ocorridos no decurso da mesma. Registei ainda as minhas reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem e sobre o decurso da investigação (Fonzi, 1999), assumindo assim a

dualidade de tipos de notas registadas em trabalho de campo, o observador reflexivo e descritivo (Bogdan & Biklen, 1994). Esta forma de registo possibilitou, também, a construção de um espaço autónomo de reflexão e distanciamento relativamente aos acontecimentos da sala de aula. Para a sua concretização elaborei um guião de registo (anexo III).

Os relatórios produzidos pelos alunos

Os alunos colocados perante as tarefas de investigação experimentavam a actividade de fazer matemática. Uma vez que os alunos não estão habituados a reflectir sobre o seu trabalho, nem a escrever sobre a estratégia desenvolvida para realização do trabalho, nem sobre as conjecturas efectuadas e a forma como foram testadas e validadas, foi pedido que elaborassem um relatório individual de investigação por actividade (Porfírio & Abrantes, 1999).

A reflexão escrita do aluno

Para recolher a opinião dos alunos sobre a concretização da actividade de investigação foi criado um guião que serviu de base à reflexão do aluno (anexo IV). Com a preocupação de não o tornar muito exaustivo, apenas coloquei no guião as questões que pretendia ver focadas pelos alunos. Os tópicos de reflexão foram colocados em forma de questão para melhor serem percebidos pelos alunos, optei por não dar espaços em branco para resposta para possibilitar o discorrer do aluno sem quaisquer limites.

Análise de dados

A análise de dados seguiu o modelo de divisão em três componentes e que é geralmente utilizado em metodologias de natureza qualitativa (Merriam, 1988): redução de dados, a sua apresentação e a interpretação /verificação das conclusões.

O processo de redução de dados iniciou-se muito cedo. Começou com a selecção dos participantes devido à definição do design de investigação e com os aspectos registados na grelha de observação e no diário de bordo, culminando com a selecção dos elementos significativos existentes nos materiais produzidos pelos alunos e nas gravações, depois de transcritas.

A apresentação é feita através de um sistema de categorias que surge a partir dos dados recolhidos e que dá forma à organização da informação obtida dos diferentes

instrumentos de recolha. Foram tidas em conta as características de diferenciação que presidiram à selecção dos alunos (objecto de estudo), a estratégia geral de acção perante a tarefa, a capacidade de integrar informações fornecidas pela tarefa nos seus esquemas de acção, a capacidade de reorientação da sua actividade perante as interacções estabelecidas, o papel do erro e a capacidade de reflectir sobre o trabalho realizado.

A interpretação dos dados que respeita a construção de significado a partir dos dados reduzidos, das relações identificadas entre eles, permitiu a construção de proposições ou modelos de explicação. Neste trabalho, a divisão desta etapa foi feita em dois níveis: (1) análise de cada caso; e (2) análise comparativa entre os casos, identificando os aspectos que os distinguem e aproximam.

CAPÍTULO IV

AS EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM

Tarefa 1: Unindo os pontos médios de um quadrilátero...

Descrição e implementação da tarefa

Esta tarefa foi adaptada da brochura Geometria – 10ºano de escolaridade (Loureiro et al., 1997), editada pelo Departamento do Ensino Secundário no âmbito do ajustamento dos programas de Matemática verificado em 1997. Também se encontra referida como uma proposta de trabalho para o módulo inicial do actual programa de Matemática –A.

Para a propor na sala de aula foi necessário adaptá-la à realidade dos alunos em causa e à sua linguagem (Oliveira et al., 1999a). Por exemplo, a linguagem matemática teve em conta a maturidade matemática dos alunos nesse momento, semelhante à usada nas aulas, sem excessivo formalismo simbólico.

Os alunos já tinham realizado duas actividades deste tipo. Ambas se enquadraram no módulo inicial, a primeira esteve relacionada com a semelhança entre as garrafas de água de 0,25l; 0,33l; 0,5l e 1, 5l de uma mesma marca e a segunda com os 3 problemas clássicos da história da matemática: duplicação do cubo, quadratura do círculo e trisecção do ângulo. O facto de já terem realizado actividades de investigação, no ano lectivo de recolha de dados, facilitou a compreensão do trabalho a realizar. Uma vez que já sabiam que a resposta à proposta de trabalho não passava pela a apresentação de uma solução. A tarefa foi apresentada aos alunos em suporte escrito com organização gráfica de aspecto familiar aos alunos, isto para que os alunos tivessem à sua disposição a proposta de investigação sempre que necessitassem auto-avaliar ou reorientar o seu trabalho ou repensar o trabalho realizado.

Ao nível dos recursos, na já referida brochura, a tarefa encontra-se proposta para o desenvolvimento de uma actividade de investigação em ambiente geométrico dinâmico (AGD), mas a minha opção foi propor aos alunos o desenvolvimento da investigação sem o referido auxiliar tecnológico. Esta opção baseou-se na premissa de que os alunos, no ano lectivo da recolha de dados, ainda não tinham trabalhado com o AGD e a realização da actividade de investigação com recursos computacionais poderia deslocar a atenção dos alunos para o domínio do referido ambiente.

Esta tarefa foi apresentada aos alunos numa única página com 3 figuras, com a explicação do problema de investigação e com várias sugestões de abordagem (anexo V). As figuras sugeriam que os quadriláteros podem tomar diferentes formas. As apresentadas foram: “papagaio de papel”, trapézio e outra figura plana de 4 lados do comprimentos diferentes. Na última das figuras estavam marcados os pontos médios A, B, C e D de forma a puderem ser mais facilmente identificados pelos alunos. Na proposta, ao fazer a explicação do problema de investigação houve o cuidado de começar com a afirmação:

Para um ou vários quadriláteros, determine os seus pontos médios e em cada um deles, construa os segmentos de recta definidos por pontos médios de lados consecutivos.

Uma afirmação directiva que sugere uma pista para o início da investigação e ao mesmo tempo alerta para a necessidade de utilizar vários quadriláteros para se puder proceder à generalização das conjecturas efectuadas. No parágrafo seguinte, foi usada pela primeira vez, nesta tarefa, a palavra “investigue”:

Investigue que tipo de polígonos obteve. Justifique a sua conjectura.
Sugestão: Trace uma diagonal do quadrilátero inicial e compare com os lados do polígono obtido.

Utilizando uma linguagem própria da matemática sugeria um primeiro contacto com esta investigação e ao mesmo tempo mostrava que o processo deveria passar por uma conjectura e sua justificação.

O passo seguinte foi dar a cada aluno a oportunidade de orientar a sua actividade de investigação no sentido que a sua intuição indicava:

Investigue as várias propriedades e relações geométricas que podemos estabelecer entre um quadrilátero e o polígono que se obtém unindo os pontos médios de lados consecutivos.

A tarefa foi proposta aos alunos no momento em que estudavam os lugares geométricos no plano com ela pretendia que contribuísse para o desenvolvimento da resolução de problemas usando modelos geométricos, da capacidade de formular generalizações a partir de experiências e validar conjecturas acerca da definição de diferentes conjuntos de pontos do plano. Nesta fase da investigação, supunha que os

alunos podiam explorar várias propriedades e relações entre os dois quadriláteros e também justificar e verificar as suas conjecturas de várias formas. No entanto, é de salientar que para as justificarem, eu não esperava que recorressem ao cálculo vectorial, pois este assunto ainda não tinha sido explorado nas aulas. Assim, esperava que os alunos recorressem a justificações do tipo: decomposição do quadrilátero inicial em triângulos e utilização dos critérios de semelhança entre triângulos; áreas e razões de semelhança entre comprimentos e entre áreas. No final da proposta de investigação eram dados vários exemplos de abordagem. Tinham o propósito de auxiliar os alunos com menos apetência para este tipo de tarefa:

Por exemplo:

- Caso seja possível, a que propriedade deve obedecer um quadrilátero para que, unindo os pontos médios dos lados consecutivos, se obtenha:

Um rectângulo? Um quadrado? Um trapézio? Um losango?

- Qual a relação entre o perímetro do polígono obtido e a soma dos comprimentos das diagonais do quadrilátero original.

- Investigue qual a relação entre as áreas do quadrilátero inicial e do polígono obtido unindo os pontos médios dos lados consecutivos.

Etc.

Para a avaliação do trabalho realizado procurava saber se os alunos tinham tipificado o quadrilátero que resultava da união dos pontos médios e qual a justificação que apresentavam para a sua classificação. Quando isto acontecia deslocava o meu foco de atenção para a exploração de outras propriedades ou relações da figura e respectivas justificações. Caso não acontecesse, a avaliação do trabalho iria ter em conta a investigação realizada e as justificações apresentadas e não recairia sobre o resultado final.

A tarefa *Unindo os pontos médios de um quadrilátero* foi implementada no dia 12 de Dezembro de 2003, numa aula “de duas horas”, 50 minutos mais 50 minutos. Esta aula correspondeu às lições nº 44 e 45.

Para o desenvolvimento da actividade de investigação os alunos foram organizados em grupos de 4, ficando um grupo com 2 e um outro com 3 elementos por questões de organização da sala e porque considerei que um grupo de 5 elementos era demasiado grande. Os alunos agruparam-se segundo as suas preferências e foi entregue uma folha com a tarefa de investigação a cada aluno. Solicitei que os alunos discutissem em grupo as conjecturas efectuadas, partilhassem as diferentes conjecturas e a sua

justificação ou refutação, mas no final da actividade cada aluno teria de entregar um documento escrito com a investigação realizada e as conclusões obtidas.

A solicitação de um documento escrito por cada aluno e não a produção de um documento único que integrasse a investigação do grupo relacionou-se com o facto de ser importante que cada aluno desenvolvesse o seu poder de comunicação, organização e apresentação de uma investigação. Com esta opção também foi evitada a divisão de tarefas dentro do grupo, uma vez que, assim todos deveriam produzir um documento com as suas abordagens personalizadas, embora se verificasse a partilha de ideias e explorações.

Desenvolvimento da actividade de investigação

A folha com a tarefa foi entregue aos alunos e estes começaram a trabalhar empenhadamente:

...com grande entusiasmo, começaram a fazer comentários entre eles sobre a tarefa em causa. Fazendo uma leitura rápida da proposta de imediato começaram a solicitar-me para esclarecer dúvidas. (Diário de bordo, 12/12/03)

Após uma ronda pelos grupos para verificar como estavam a iniciar a investigação, apercebi-me que havia dúvidas relacionadas com a linguagem ou com a organização das respostas. Nomeadamente, o grupo em que se encontrava o André, constituído por quatro elementos, e o próprio André questionou acerca do termo conjectura: “Justifique a sua conjectura? Justifique a sua conjectura?”. Os alunos, na generalidade, leram mais do que uma vez o primeiro parágrafo da tarefa dando a entender que existiam dificuldades de compreensão. Outros grupos questionaram-me acerca da organização e conteúdo do relatório de investigação a entregar no final, o que motivou uma intervenção da minha parte:

Foi necessário reforçar que o relatório final tinha de incluir as respostas às questões colocadas e/ou a exploração de outras questões suscitadas no desenvolvimento da tarefa assim como das opções de abordagem tomadas. (Diário de bordo, 12/12/2003)

A ocorrência relacionada com a percepção da tarefa proposta foi alvo de reparo por parte também do Lourenço, o que me levou a questionar a clareza do enunciado da tarefa:

Na minha opinião o trabalho proposto tinha um objectivo pouco perceptível, no enunciado. (Reflexão escrita do Lourenço, 12/12/2003)

No momento em que os alunos desenvolviam o seu trabalho de investigação, eu circulava pela sala de aula e aproximava-me dos diferentes grupos de forma a responder às suas solicitações. Durante a actividade de investigação fui registando na grelha de observação as questões mais pertinentes colocadas pelos alunos, as interacções estabelecidas e os seus erros e dificuldades. As questões que foram colocadas pelos alunos atingiram vários níveis de profundidade. As mais frequentes solicitavam a minha intervenção para a interpretação e a reorientação:

Rita: Pontos médios e depois unir. Ver o que se obtém com a união dos pontos médios. Um polígono?

Eu: Polígonos são todos.

Rita: A sua forma? Isto é um rectângulo?

Marta: Uso as figuras que estão na folha? Ou posso usar outras diferentes?

Eu: As figuras são só exemplos. Podem usar outras.

Ao nível dos grupos de trabalho alguns alunos distribuíram tarefas dentro do próprio grupo. Esta estratégia foi seguida pelo grupo do Lourenço, constituído por três elementos, onde se decidiu explorar individualmente a tarefa com muitos exemplos diversificados e depois discutir as conclusões de cada elemento no final.

Na opinião do grupo do Lourenço, o trabalho divergiu do que estava sugerido na folha da proposta de investigação. Estes alunos exploraram vários quadriláteros diferentes, tendo o Lourenço apresentado no relatório de trabalho realizado cinco figuras das muitas exploradas. Sendo quadriláteros de diferentes tipos e dispondo o grupo de vários exemplos diferentes, pois cada elemento do grupo explorou as suas próprias criações, por comparação e visualização chegaram à conclusão que a união dos pontos médios de um quadrilátero é um quadrilátero. A partir desta dificuldade de classificação, o grupo passou a calcular perímetros e comprimentos de diagonais afim de encontrar relações entre os mesmos, o que conseguiu com sucesso:

A relação existente entre [o comprimento] as diagonais deste quadrado e o perímetro do polígono são idênticas [iguais]. Também concluímos que a soma [do comprimento] das diagonais de um quadrilátero e o perímetro do polígono obtido pelos pontos médios é idêntico [igual]. (Relatório do Lourenço, 12/12/2003)

Noutros grupos, os alunos realizaram a investigação discutindo todas as passagens, desde o simples desenhar do quadrilátero. Foi o caso dos grupos da Rita, do André e da Marta.

O grupo da Rita, constituído por 4 elementos, começou por desenhar um quadrado, depois um losango e dois trapézios, um equilátero e outro escaleno. Após a marcação dos pontos médios e da construção dos segmentos de recta que os uniam pararam para estabelecer conjecturas, relativamente ao quadrado, ao losango e aos trapézios:

Conjecturas da união de pontos médios de quadriláteros:

- 1- Com a união dos pontos médios de um quadrado obtém-se um quadrado.
- 2- Com a união dos pontos médios de um paralelogramo obtém-se outro paralelogramo.
- 3- Com a união dos pontos médios de um trapézio obtém-se um losango. (Relatório da Rita, 12/12/2003)

A investigação da Rita seguiu o mesmo percurso de análise destas quatro figuras planas de partida.

O grupo em que estava integrado o André desenvolveu uma estratégia que passava pela colocação dos quadriláteros num referencial cartesiano que não foi concretizada na sua plenitude. Com dificuldade em efectuar alguns cálculos e não conseguindo estabelecer relações concretas entre os diferentes quadriláteros, esta estratégia, para eles, revelou-se pouco compensadora.

O grupo da Marta, que era constituído apenas pela Marta e outra aluna, adoptou como base do trabalho de investigação os quadriláteros fornecidos na proposta da tarefa de investigação. Este grupo chegou a conclusões que foram justificadas como sendo verdadeiras para os exemplos utilizados:

Conclusão foi que da união dos pontos médios de um quadrilátero resultam polígonos quadriláteros, tal como se viu no exemplo 1 [“papagaio de papel”]: em que os pontos médios do quadrilátero formaram um rectângulo; no exemplo 2 [trapézio]: em

que os pontos do trapézio formam um losango; e no exemplo 3 [figura plana de 4 lados de comprimentos diferentes]: em que a união dos pontos médios deu origem a um paralelogramo. (Relatório da Marta, 12/12/2003)

A Marta também procurou encontrar outras relações entre as três figuras, tendo a preocupação da generalização para estes casos:

Exemplo 1 da folha: os segmentos de recta DE e GF são paralelos a HI e os segmentos de recta DG e EF são paralelos a JL. Nota: o mesmo acontece nos outros dois exemplos. (Relatório da Marta, 12/12/2003)

Na redacção do relatório sobre o desenvolvimento desta investigação, alguns alunos limitaram-se a responder ao problema inicial colocado para investigação, sem explicar todas as fases que tiveram de executar para chegar a esse resultado. Mas, o facto de terem colocado dúvidas diversas durante o desenrolar da actividade levaram-me a concluir que essas fases existiram:

Fui chamado por diversas vezes para confirmar a interpretação de investigação feita pelos alunos, assim como confirmar afirmações matemáticas do tipo do Teorema de Pitágoras e suas condições de aplicabilidade. (Diário de bordo, 12/12/2003)

Na aula seguinte à exploração da tarefa foram devolvidos os relatórios de investigação com o feedback na forma de comentários escritos acerca da apresentação e da comunicação. Nalguns casos foi feita a referência ao facto de não apresentarem todos os exemplos de quadriláteros explorados e apenas terem apresentado os exemplos que justificavam as conjecturas. Foi realizada uma discussão sobre o tipo de figura encontrada e cada grupo explicou o caminho seguido na investigação e as conclusões a que chegou, em particular:

Podemos concluir que quando unimos os pontos médios de vários quadriláteros, resultam outros, diferentes quadriláteros. Também concluímos que a soma das diagonais de um quadrilátero com o perímetro do polígono obtido pelos pontos médios é idêntica. (Relatório do Lourenço, 12/12/2003)

Para que, unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero se obtenha um rectângulo, o quadrilátero deve ser um losango. Para que, unindo os pontos médios dos lados consecutivos de

um quadrilátero se obtenha um quadrado, o quadrilátero deve ser um quadrado. Para que, unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero se obtenha um losango, o quadrilátero deve ser um rectângulo. (Relatório da Rita, 12/12/2003)

Um quadrado unindo os pontos médios consecutivos forma um quadrado, todos os outros quadriláteros formam sempre um paralelogramo. (Relatório do André, 12/12/2003)

Uma das conclusões a que chegámos foi que uma das diagonais do quadrilátero é paralela a dois lados do polígono obtido pela união dos pontos médios do quadrilátero, e a outra diagonal é paralela aos outros dois lados. (Relatório da Marta, 12/12/2003)

Como existiam várias sugestões que não tinham sido exploradas, foi dito aos alunos que poderiam continuar a investigar extra-aula, sem carácter obrigatório, e depois entregavam os relatórios com os avanços alcançados.

No final, considerei o trabalho desenvolvido como muito positivo e, apesar das dificuldades de interpretação sentidas por parte dos alunos no início, todos conseguiram estabelecer uma conjectura e chegar à conclusão que a união dos pontos médios de um quadrilátero é um paralelogramo, embora alguns não o classificassem. No entanto, só alguns alunos identificaram ou investigaram mais do que uma propriedade ou relação geométrica entre o quadrilátero inicial e o polígono obtido pela união dos pontos médios. O tempo poderá ser uma justificação para este facto:

Os alunos solicitaram muitos esclarecimentos sobre a linguagem utilizada na proposta de investigação, por exemplo: conjectura, ponto médio, quadrilátero e paralelogramo, quadrado e losango. Ao procurarem explicações para estes termos e para o estabelecimento de diferenças entre as diferentes figuras planas o tempo foi passando sem que comesçassem a investigar. No final, justificaram-se com a falta de tempo para a pouca exploração que fizeram da tarefa proposta. (Diário de bordo, 12/12/2003)

A questão do tempo foi reforçada pelo Lourenço na sua reflexão sobre o trabalho desenvolvido:

Gostaria de dizer que o trabalho de investigação teve tempo escasso para pudermos dar asas ao dito. (Relatório do Lourenço, 12/12/2003)

Apesar do tempo ter sido uma questão pertinente para reflexão, optei por não voltar a disponibilizar mais tempo em aula para esta tarefa, por várias razões: os alunos tinham tido 2 aulas para implementar a sua investigação; alguns alunos estavam com dificuldade em seguir as pistas de investigação ou em encontrar outros caminhos de investigação; mesmo disponibilizando mais aulas a tarefa estaria sempre incompleta para alguns e concluída para outros e a próxima aula era 4 dias depois, com um fim-de-semana pelo meio, o que poderia levar os alunos a definir uma estratégia de resposta elaborada extra-aula. Contudo, penso que a não obrigatoriedade da continuação da actividade de investigação, após a devolução dos relatórios, levou a que ninguém entregasse a continuação do trabalho de investigação.

Tarefa 2: Pavimentações

Descrição e implementação da tarefa

Esta tarefa integra uma investigação sobre pavimentações regulares e o texto foi construído a partir de pesquisa na Internet, nomeadamente no *site* da Associação de Professores de Matemática e nas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991).

Decidi escolher este tema por duas razões: ser um tema de fácil aceitação por parte dos alunos uma vez que estes podem usar a sua criatividade e os recursos que dispõem de outros conteúdos programáticos; e por ser fácil abordar e perspectivar o desenvolvimento de uma investigação a partir de diferentes pontos de vista.

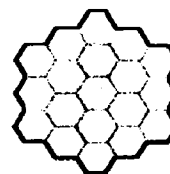
A proposta incluía um AGD, uma vez que entre a realização da primeira tarefa e a realização da segunda os alunos trabalharam com o ambiente computacional ficando familiarizados com este tipo de tecnologia.

A tarefa foi apresentada numa folha A4 com frente e verso (anexo VI) e da folha entregue aos alunos faz parte uma possível definição de pavimentação:

Uma pavimentação consiste em cobrir totalmente uma superfície, repetindo um padrão formado por figuras geométricas de tal forma que nunca se verifique qualquer sobreposição.

Depois de contextualizar os alunos, na tarefa proposta era-lhes solicitado o primeiro desafio, sobre as pavimentações regulares:

As chamadas pavimentações regulares – são aquelas em que o ladrilho é um polígono regular (ver figura). Ao observar esta pavimentação colocam-se algumas questões: quais os polígonos regulares que pavimentam? Ou quantas pavimentações regulares existem? Porquê? A resposta a estas questões é uma pequena investigação.



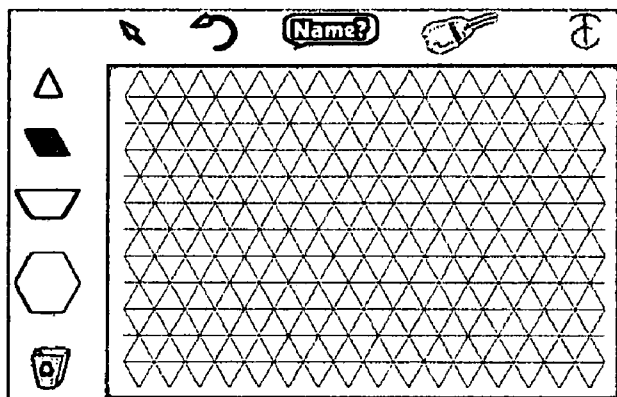
Para a exploração da pequena investigação proposta foi-lhes facultado o endereço de uma página na Internet com um AGD (Ambiente Geométrico Dinâmico) disponível:

<http://www.apm.pt/apm/enumat/menu3.html>

Neste endereço os alunos encontravam um AGD com diferentes tipos de quadriláteros, em que eles poderiam aceder aos regulares e aos irregulares e onde podiam comparar e experimentar conjecturas de pavimentações regulares:

http://www.best.com/~ejad/java/patterns/patterns_j.shtml

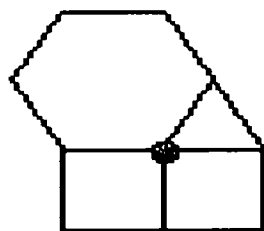
Com as figuras geométricas da esquerda (triângulo, paralelogramo, trapézio e hexágono) podes pavimentar o plano, ou seja, com uma ou mais dessas figuras compor uma nova figura com a qual consigamos cobrir completamente o plano representado pela malha de triângulos. Para deslocar as peças para o plano basta arrastá-las com o rato.



Constrói pavimentações usando uma ou mais formas. Podes inclusivamente fazer desenhos engraçados que cubram todo o plano.

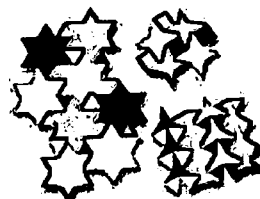
Finalmente e ainda na proposta de investigação os alunos eram confrontados com a existência de outras planificações: as que resultam do contorno de um vértice pela mesma disposição de polígonos regulares e as que resultam de translações, rotações e simetrias:

Outras Pavimentações



Mas também é possível pavimentar com outras figuras.

Se admitirmos a utilização de 2 ou mais polígonos regulares. Se cada vértice for contornado pela mesma disposição de polígonos regulares então poderão surgir outras pavimentações? Por exemplo: usando um triângulo equilátero, dois quadrados e um hexágono regular.



Estava assim dado o pontapé de saída para o desenvolvimento desta actividade de investigação.

No ano lectivo em que decorreu a recolha de dados deste estudo, foi a primeira vez que foi abordada a temática das pavimentações. A abordagem deste tema foi feita num contexto em que os alunos se encontravam a explorar o tema do cálculo vectorial no plano e no espaço e pretendia: (i) desenvolver a competência de usar vectores em referencial ortonormado; (ii) abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade, de formular generalizações a partir de experiências e de usar a tecnologia, nomeadamente o ambiente geométrico dinâmico.

Devido à necessidade de recorrer à Internet, a actividade de investigação foi programada para a sala onde se encontra a funcionar o laboratório de matemática. Nesta sala existem 6 computadores ligados à Internet e outros recursos para as aulas de matemática: cubos em acrílico, sólidos em vidro e em madeira, polidrons, palhinhas para construção de sólidos, calculadoras gráficas e livros de matemática.

Para o desenvolvimento desta investigação estavam previstas duas aulas: uma de turno, com cerca de metade dos alunos da turma; e uma aula com a totalidade dos alunos da turma onde se incluía a discussão do trabalho realizado. Como os turnos tinham respectivamente 12 e 13 alunos pensei em agrupar os alunos em grupos de dois e assim ser mais fácil o trabalho de exploração e investigação com recurso ao computador. O trabalho em díade também me permitia fornecer-lhes de forma mais eficaz o apoio que necessitassem para aceder ao AGD.

À semelhança do que aconteceu na tarefa anterior foi solicitado a todos os alunos a elaboração de um documento escrito, relatório com o trabalho desenvolvido nesta actividade de investigação. A partir da análise dos relatórios pretendia avaliar a comunicação matemática e se os alunos tinham interiorizado os conceitos de pavimentação e pavimentação regular. Também foram registadas numa grelha de observação os comportamentos dos alunos, as suas questões mais pertinentes e outras interacções significativas, do meu ponto de vista, que ocorreram na sala de aula.

Desenvolvimento da actividade de investigação

No início da primeira aula em que a investigação foi realizada, aula de turno, deparei-me com o facto de apenas conseguir ligação à Internet em 4 dos 6 computadores disponíveis. Perante este facto, foi necessário reestruturar o plano de aula e organizar os alunos em grupos de 3 alunos por computador. A actividade decorreu sem problemas, tendo os alunos uma reacção bastante positiva à proposta que lhes foi colocada:

Entusiasmo e interesse em consultar a página de Internet colocada na proposta de trabalho foi a primeira reacção à investigação proposta, mas assim que no monitor do computador apareceu a actividade interactiva disponibilizada pelo AGD as experiências começaram. (Diário de bordo, 4/2/2004)

No trabalho desenvolvido pelos alunos do primeiro turno as principais questões relacionaram-se com as definições de polígono regular e de pavimentação:

Os alunos questionaram sobre a definição de pavimentação apresentada na folha que lhes foi entregue e questionaram-me sobre as características de um polígono regular. (Diário de bordo, 4/2/2004)

Os alunos mantiveram-se empenhados na exploração da tarefa durante toda a aula, no entanto, tive a necessidade de alertar para o facto de procederem a registos escritos da investigação efectuada, pois notei que os alunos iam chegando a conclusões importantes mas não tinham a preocupação de as registar.

No segundo turno, o entusiasmo pela exploração de uma tarefa de investigação recorrendo à Internet manteve-se. Como já sabia que só podia contar com 4 computadores, os alunos foram agrupados em grupos de 3 alunos logo desde a sua entrada na sala. Alertei, também, para o facto de registarem as conclusões a que

chegassem uma vez que era necessário elaborar um relatório sobre a investigação realizada:

Dados para a elaboração dos relatórios? Se não registam as conclusões como querem ter dados para depois elaborarem o relatório?
(Diário de bordo, 4/2/2004)

Verifiquei que os alunos do segundo turno tinham as mesmas dificuldades na definição de polígono regular como sendo um polígono com todos os lados e todos os ângulos internos iguais:

Os alunos chamaram-me várias vezes e em grupos diferentes para confirmarem se o trapézio e o losango eram polígonos regulares.
(Diário de bordo, 4/2/2004)

Na segunda aula ocorreu a redacção do relatório e a discussão das conclusões. Para a redacção do relatório, os alunos usaram os computadores para experimentar mais alguns exemplos. Nesta aula dedicaram-se mais à elaboração do relatório e à testagem e confirmação das conjecturas já estabelecidas, mas desta vez usando os materiais manipuláveis (polidrons). Os polidrons serviram para esclarecer as dúvidas de uma aluna, a Rita, e como estavam disponíveis na sala (laboratório de matemática) foram fornecidos à generalidade dos alunos. Este facto provocou nos outros alunos um efeito de “bola de neve”. A exploração passou a realizar-se com AGD e polidrons.

Ao nível dos alunos estudados verificou-se um maior envolvimento neste trabalho. O grupo do Lourenço, constituído por mais 2 alunos do sexo masculino, mostrou-se muito empenhado na exploração da tarefa:

Os triângulos cabem todos aqui, não dá porque..., temos de experimentar todos, os polígonos, experimenta, o quadrado, mete lá o quadrado, dá! Tipo parte os triângulos a meio! O pentágono não dá? Ou dá?

Nas interacções no seio do grupo usaram, repetidamente, o termo “experimenta”. E experimentaram muito, até que chegaram à seguinte conclusão:

Nos vértices dos triângulos, losangos, hexágonos e quadrados a soma dos ângulos é igual a 360° , por isso forma uma pavimentação regular. Nos vértices dos pentágonos a soma nunca dá 360° logo o

pentágono não forma uma pavimentação regular. (Relatório do Lourenço, 4/2/2004)

Pelo que o Lourenço escreveu no relatório, o losango foi erradamente tomado como um polígono regular. Saliento o facto de o Lourenço na reflexão escrita sobre o trabalho desenvolvido nesta actividade ter referido que “o valor dos ângulos deveria vir na ficha [proposta]” (Reflexão escrita do Lourenço, 4/2/2004). Isto indica de alguma forma a tomada de consciência sobre a confusão que existiu durante a investigação em relação aos conceitos de quadrilátero e polígono regular. O Lourenço durante a discussão percebeu que tinha confundido pavimentação com pavimentação regular:

Lourenço: Os triângulos, os losangos, os hexágonos, os quadrados e os rectângulos são polígonos regulares que formam pavimentações regulares. A soma dos ângulos no vértice é 360° !

Eu: Losango? Rectângulo?

Lourenço: Regulares! Ah! Pavimentações regulares formadas com polígonos regulares.

O grupo da Rita era constituído por mais um aluno e uma aluna. Os três discutiram o facto de as figuras apresentadas no AGD para experimentação de pavimentações serem ou não regulares:

João: Todos os que estão aqui dão.

Rita: Regulares? Nem todos!

João: Vamos ver os regulares que pavimentam.

Rita: E o pentágono?

João: Acho que dá

Rita: 1, 2, 3, 4, 5. Se puseres assim?

João: O trapézio não é regular?

Sara: Isto é regular?

A Rita no relatório sobre o desenvolvimento da investigação indicou as três “pavimentações regulares existentes: pavimentações com triângulos equiláteros, pavimentações com quadrados e pavimentações com hexágonos” (Relatório da Rita, 4/2/2004). Refere o facto do pentágono não as formar, mas não explica o motivo nem o episódio que se passou na aula, com os pentágonos. O episódio que marcou esta investigação foi a conjectura feita pela Rita de que o pentágono pavimentava. Os outros elementos do grupo reforçaram esta intuição desenhando pentágonos irregulares que uniam entre si e formavam uma espécie de pavimentação. Perante este facto foi

necessário recorrer a outros recursos e foi neste momento que forneci à Rita os polidrons (pentágonos regulares) e lhe solicitei que construísse com eles uma pavimentação do plano:

Rita: O pentágono também dá! Não dá?

Eu: O regular?

Sara: Com os lados e os ângulos todos iguais?

Rita: Achas que este lado é igual a este?

Sara: Não dá onde?

Eu: Experimentem.

Rita: Os polidrons! Os Pentágonos não dão! Este não liga com este.

Como balanço final do trabalho realizado, a Rita destacou o papel do professor relativamente ao “esclarecimento de dúvidas como quais as características de um polígono regular” (Reflexão escrita da Rita, 4/2/2004).

O grupo da Rita foi um dos grupos de alunos que efectuou poucos registos durante o desenvolvimento da investigação das *Pavimentações*:

A minha maior dificuldade foi exprimir as justificações para as conjecturas idealizadas pois, apesar de as compreender, passar para o papel é bastante mais complicado. (Reflexão escrita Rita, 4/2/2004)

Uma novidade na reflexão escrita de um aluno foi a apresentada pela Rita e refere-se ao facto de aprender a realizar investigação:

Fiquei com uma melhor noção do que é uma pavimentação e de várias maneiras para realizá-la e também aprendi novos métodos para realizar uma actividade de investigação, como a Internet, experimentações com desenhos, e comparando-os com os dos colegas. (Reflexão escrita Rita, 4/2/2004)

O André estava integrado num grupo com 2 alunos do sexo masculino. O André foi o aluno que menos escreveu no relatório de investigação, no entanto, escreveu as duas principais conclusões:

São o quadrado, o hexágono regular e o triângulo equilátero porque a soma dos ângulos que concorrem ao mesmo vértice é de 360° . Existem 3 pavimentações regulares. Existem outras pavimentações desde que a soma dos ângulos que concorrem ao mesmo vértice seja de 360° . (Relatório do André, 4/2/2004)

No entanto e através da interacção estabelecida entre mim e o André foi do meu conhecimento que ele explorou outras conclusões igualmente importantes e não registadas no relatório:

André: O pentágono à partida não dá porque não tem os lados todos iguais.

Eu: Não tem, mas pode ter?

André: Ahhh! O pentágono regular tem os lados todos iguais.

Eu: Esse dá?

André: Dá Professor, o pentágono regular tem de dar.

Eu: Usa os polígonos.

André: Os três pentágonos! Então não dá! E agora porquê? O ângulo do pentágono quanto é? Fica um buraco! Qual é o ângulo do pentágono?

Eu: Pensa.

Na reflexão sobre o trabalho desenvolvido, o André não se refere à elaboração do relatório. Destaca os processos usados, os erros cometidos e a questão da generalização:

Apresentei teorias [conjecturas] erradas aos meus colegas de trabalho e ao professor, afirmando algumas soluções que do meu ponto de vista estavam certas, mas depois de as observar com os meus colegas e o professor verifiquei que se encontravam incorrectas. Penso que esses erros foram cometidos devido a não ter verificado se a solução por mim (ou o grupo) apresentada era possível, neste caso se a solução era compatível para todos os polígonos regulares. (Reflexão escrita André, 4/2/2004)

A Marta trabalhou em parceria com outra aluna. O relatório elaborado pela Marta sobre a actividade desenvolvida estava muito completo em termos de resultados, mas não incluía as pesquisas efectuadas nem as conjecturas testadas. No relatório estavam expressos resultados e conclusões correctas, onde se incluiu as diferentes explorações feitas, separando-as em pavimentações regulares e outras pavimentações:

As pavimentações podem ainda ter um padrão com 2 ou mais polígonos regulares. Mas deixam de ser, como é óbvio, pavimentações regulares, porque não têm um só polígono. Têm vários, que por sua vez têm ângulos diferentes. Estes padrões têm apenas que ter todos os vértices contornados pela mesma disposição de polígonos regulares. (Relatório da Marta, 4/2/2004)

Mas outras explorações existiram que não foram referidas, como por exemplo o pentágono:

Marta: O losango também pavimenta, mas não é regular.

Joana: os que dão pavimentações regulares é o quadrado e o triângulo.

Eu (olhando para o desenho na folha da Marta): E porque é que os outros não fazem? Este [o pentágono]?

Marta: Como justificação podemos apresentar o desenho?

Joana: O que é que faz mais, este não faz!

Marta: Fica com brechas, com grandes brechas! O pentágono não dá!

Não há mais figuras, pois não? Quantas pavimentações, 3 ou 4, incluindo o losango: Hexágono, quadrado, triângulo e losango.

Joana: Regulares?

Marta: São 3! Os quadrados, os triângulos e os hexágonos, tudo polígonos regulares.

No final do trabalho realizado, a Marta destaca dois pontos: os erros cometidos e a natureza da tarefa proposta:

Ao longo do desenvolvimento desta tarefa cometi erros como julgar que uma figura pavimentava quando não o fazia, e cometi porque estava a testar ideias minhas e a verificar que figuras pavimentavam, o que veio por sua vez contribuir bastante para a concretização da tarefa, porque sem estes erros, possivelmente não chegava a nenhuma conclusão. (Reflexão escrita Marta, 4/2/2004)

Mais fácil também, porque tínhamos mais a que recorrer para a realização do mesmo. Foi ainda um trabalho de investigação mais completo porque tínhamos muita coisa para abordar. (Reflexão escrita Marta, 4/2/2004)

A discussão do trabalho realizado decorreu em conjunto com toda a turma sendo salientados como tópicos de discussão: quais as características de uma pavimentação regular, quantas foram as pavimentações regulares encontradas e que outras pavimentações existem. Os alunos, sem a nomeação de um porta-voz do grupo, foram expondo os seus resultados e as suas justificações.

Relativamente ao balanço final do trabalho desenvolvido, quero salientar a facilidade com que os alunos utilizaram as tecnologias de informação, a Internet e os computadores, mesmo com AGD que não lhes era familiar. A discussão dos resultados da investigação desenvolvida não teve um papel muito importante, uma vez que os alunos construíram os seus significados e conceitos ao longo do desenvolvimento da

actividade, intervindo e reforçando sempre o seu ponto de vista através de alguns argumentos que se encontram escritos nos relatórios.

Devido à dificuldade demonstrada por parte de alguns alunos em realizar registos escritos das conclusões, entreguei, após a discussão dos resultados da tarefa de investigação, um resumo com três páginas que continham uma abordagem adaptada, a partir dos sites pesquisados na Internet, à tarefa proposta.

Tarefa 3: Zeros de uma função polinomial

Descrição e implementação da tarefa

A terceira tarefa de investigação usada para recolher dados para a realização deste estudo intitula-se *Zeros de uma função polinomial*. Trata-se de uma tarefa pouco estruturada. Concordando com Brunheira (2000), a minha experiência neste tipo de tarefas, assim como a experiência dos alunos, foi aumentando o que possibilitou a diminuição do seu grau de estruturação.

Para concretizar esta actividade de investigação foi fundamental o uso da calculadora gráfica, que tornou possível experimentar os muitos exemplos necessários para obter as conclusões e para aceitar ou refutar as conjecturas (Rocha, 2002b).

A tarefa foi proposta aos alunos em suporte escrito adoptando a formulação escrita que vem no livro Funções (Teixeira et al., 1997):

Quantos zeros pode ter uma função polinomial do
1º grau? 2º grau? 3º grau? de grau n ?

Para os autores do referido livro, esta proposta permite que os alunos desenvolvam o seu poder de argumentação, a sua capacidade de comunicação e o seu espírito de colaboração. Foi com o intuito de contribuir para o desenvolvimento destas competências que a coloquei aos meus alunos. Mas outros objectivos se impunham: pretendia que os alunos chegassem à conclusão que no máximo uma função polinomial de grau n tem n zeros e que a partir dessa investigação estabelecessem condições para que, por exemplo: uma função de grau dois tenha dois, um ou nenhuns zeros; uma função de grau três tenha um zero, dois ou três zeros; que aspectos gráficos podem apresentar as funções de grau 3? E as de grau 4? E grau n ? Que diferenças podemos encontrar entre o grau par e o ímpar? Etc.

No momento em que esta tarefa foi solicitada aos alunos, os conteúdos explorados nas aulas diziam respeito ao tema funções e gráficos, e tinham sido abordados os conteúdos respeitantes a “função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica” (DES, 2002, p.27) e “estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos” (DES, 2002, p.28) apenas no que diz respeito a domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos, simetrias, limites nos ramos infinitos a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica. No programa não existe referência a tarefas de exploração do número de zeros de uma função polinomial, mas decidi propô-la tendo em conta que a questão da associação entre a expressão de uma função e o respectivo gráfico pode ser importante, para a continuação do trabalho em funções, para desenvolver nos alunos a competência de associação entre a expressão algébrica e o aspecto gráfico de uma função, assim como o número de zeros, possibilitando uma maior probabilidade de prever a expressão ou o gráfico da função em situações de modelação.

Para a concretização dos objectivos, foi solicitado aos alunos um relatório escrito sobre a investigação desenvolvida e para isso foi sugerido que trabalhassem em grupos de 4 elementos, que confrontassem o seu trabalho com o dos seus colegas, percebendo as diferenças e as semelhanças, e a veracidade ou falsidade das conjecturas efectuadas, reforçando assim a vertente de colaboração, que já se tinha verificado nas tarefas anteriores.

Desenvolvimento da actividade de investigação

A actividade de investigação sobre *Zeros de uma função polinomial* correspondeu às aulas, nº 102, 103 e 104. Entre as aulas 103 e 104 existiram duas aulas não leccionadas devido à participação dos alunos numa visita de estudo. Os alunos entregaram-me os relatórios sobre a investigação realizada no final da primeira aula, o que lhes foi devolvido, com comentários, no início da aula nº 103 para puderem continuar a investigação. No final da aula nº103, voltaram a entregar o trabalho realizado, li-o e dei feedback. Devolvi-o na aula nº104 em que foi a discussão dos relatórios e a apresentação das diferentes conclusões.

A exploração feita pelos alunos iniciou-se com a distribuição da folha que continha a tarefa proposta. Os alunos começaram a investigar e a trabalhar com as calculadoras gráficas, com as quais já se encontravam familiarizados.

O facto da tarefa proposta não incluir expressões de funções suscitou dúvidas a alguns alunos:

Marta: Onde é que vamos tirar as expressões das funções?

Eu (devolvendo a questão ao grupo): Onde é que vão tirar as funções, Marta?

Marta: Quais as expressões que vamos experimentar?

Lourenço: 1º grau, só podem ser as rectas.

Catarina: 2º grau X^2 , terceiro grau X^3 , etc.

Lourenço: X é uma recta.

Marta: é uma função do primeiro grau, e uma do primeiro grau não é sempre uma função afim?

Lourenço: quadrática tem X^2 e cúbica tem X^3 , quadrática é do 2º grau, X^2 faz as parábolas, o primeiro grau é uma recta só pode ser expoente 1.

Marta: fazer muitas funções!

Lourenço: 1º grau, por exemplo, $Y = X$.

Outro facto a salientar ocorreu com o avançar da investigação, quando os alunos tiveram necessidade de ajustar a janela da calculadora gráfica para puderem observar os zeros das funções que estavam a experimentar:

Ruben: a função $f(X) = X^2 - 4X + 4$ não tem zeros!

Eu: Tem!

Ruben: A calculadora não os mostra!

Eu: Muda a “Window”

Ruben: Há tem um!

Eu: Justifica.

O espírito crítico perante os resultados que são veiculados através da calculadora gráfica, no momento em que esta investigação decorreu, ainda se encontrava pouco desenvolvido. Esta actividade contribuiu também para essa aprendizagem.

Para os alunos envolvidos neste estudo, a Marta e o Lourenço tiveram a particularidade de puder interagir, pois pertenciam ambos ao mesmo grupo de trabalho. O André integrou um grupo constituído apenas por rapazes e a Rita estava integrada num grupo misto, três raparigas e um rapaz.

A Rita a partir da leitura da proposta de trabalho tentou elaborar logo uma conjectura acerca dos resultados que pretendiam obter:

Rita: vá meninos vamos lá, vamos começar a trabalhar!

Rita: 1º grau só tem um X

Tiago: 1º grau só tem um zero

Rita: 2º grau tem X^2 logo 2 zeros!

Sara: grau n , é *bues* grau, 2, 3, 4, 5,

(Joana chama o professor)

Rita: estou a inventar uma expressão para o 1º grau e confirmei na máquina. 1º grau porque o X não está elevado a nada.

Tiago: está elevado a 1.

À medida que a Rita ia estabelecendo conjecturas, o Tiago vai acompanhando o seu raciocínio e os outros dois alunos procuravam esclarecer algumas das dúvidas com os colegas. O caminho de procurar a justificação para uma conjectura passou, depois, por experimentar muitas expressões alterando os diferentes parâmetros. Sem que o grupo se tenha apercebido muito bem do porquê, a Rita avança a exploração das suas conjecturas, determinando os zeros analiticamente para confirmar as suas conjecturas e para as puder generalizar, ao mesmo tempo que tenta explicar à Sara (que não acompanha os avanços da Rita) o que acontece com os polinómios de 1º grau:

Rita: $X+2$, $2X+0$? $X+0$ é X .

Sara: não faz mal vamos experimentar!

Rita: olha lá este algarismo é o b ! $+2$, $+0$, se não está lá nada o b é zero.

E se for $0X$?

Sara (olhando para o visor da máquina): quando o $X=0$ o Y é 2 mais ou menos!

Rita: por exemplo, queres ver outro exemplo?

Sara: Como é que o X pode ser zero? (referindo-se a m , na expressão $Y=mX+b$)

Rita: Acha os zeros para ver.

Sara: e onde passa aqui a linha! Já calculaste.

Calma aí Rita!

Rita: $X + X^2$

Tiago: $2X + X^2$

Rita: não é suposto dar? Quantos zeros podem ter, é o máximo de zeros mas pode ter: 0, 1 ou 2.

Tiago: Pode não ter nenhum!

Sara: Isso não se diz!

Rita: Pode não ter zeros ou ter: por exemplo: $X+5=0$, $X=-5$, o zero é -5 , passa para o outro lado!

Na continuação da actividade de investigação, o grupo da Rita, passou a investigar a influência dos diferentes parâmetros no número de zeros da função quadrática. No entanto, não chegou a relacionar isso com o binómio discriminante, mas tirou conclusões importantes acerca da deslocação das parábolas e da sua concavidade:

Quando temos um termo de 2º grau mais um termo de 1º grau a função tem sempre 2 zeros:

$$q(X) = 2X^2 + 5X, n(X) = -5X^2 + X$$

É necessário reforçar que no momento em que os alunos realizaram esta investigação, a turma ainda não tinha estudado a função quadrática, apenas sabia que pode ser definida por uma expressão de 2º grau e que o gráfico corresponde a uma parábola.

No grupo do André, exclusivamente formado por rapazes, as interações estabelecidas entre eles foram muito fortes. Empenharam-se bastante nas discussões, para compreender os diferentes significados da alteração de um parâmetro, mas não se preocuparam com o registo das conclusões ou com a testagem das conjecturas:

André: quando a função é 1º grau é definida por uma recta, a recta só pode intersectar o eixo do X uma vez.

Tiago A.: vários exemplos e verificamos!

André: grau 1 é uma recta, é uma função afim!

E o que é grau n ? 2º grau e... é sempre uma parábola se o grau for par.

Eu: vejam $Y = X^4 + 2X$ é uma parábola?

Tiago A.: não é!

e

Tiago A.: 3º grau tem 3 zeros.

Eu: E as vossas conclusões e os vossos exemplos. Registem as explorações feitas.

André: funções assim, e funções assim

As conjecturas existiam, mas não existia a preocupação de as provar. Estavam mais preocupados em arranjar contra-exemplos para refutar a conjectura estabelecida por outrem (qualquer elemento do grupo):

André: uma função que tenha 3 zeros, diferente de zero.

Tiago A.: está aqui uma: $X^3 + X^2 + X$

André: com 4 zeros, $X^4 - 4X^2 + 3X$.

Francisco: como se chama este ponto da parábola?

Eu: vértice

André: um zero, 2 zeros, 3 zeros e 4 zeros

Ruben: cúbica pode ter 3 zeros

Tiago A.: uma com três zeros pode ser grau 4 ou grau 3

Ruben: vamos fazer uma com 4 zeros

Tiago: tem a ver com o grau e com os sinais dos algarismos

Este grupo foi atribuindo significado ao que estava a explorar e posso dizer que esta interacção forte serviu para esclarecer e distinguir os diferentes conhecimentos e no final, durante a discussão da tarefa foi o grupo que evidenciou dominar o maior número de conhecimentos adquiridos com a realização desta tarefa. Foi o único grupo que se referiu ao facto de uma função de grau ímpar ter sempre um zero.

A Marta, no começo da sua actividade de investigação, ficou baralhada por não ter as expressões das funções, mas depois da intervenção de alguns elementos do grupo, ela percebeu que teria de criar as suas próprias expressões. Esta aluna, nesta investigação, mostrou uma atitude madura ao realizar a tarefa de investigação. Verifiquei, por exemplo, a consciência de que as suas conclusões poderão não ser generalizáveis:

Através das funções que verifiquei, concluo que a cada função do 1º grau existe apenas um zero, visto que estas são funções afins, são rectas, sempre crescentes. (Relatório da Marta, 31/3/2004)

Na passagem para as funções do 2º grau, a Marta sugeriu ao grupo uma perspectiva de investigação. Tratava-se de explorar exemplos com os mesmos parâmetros dos que tinham sido explorados para o 1º grau mas desta vez com o 2º grau:

Catarina: 2º grau

Marta: 2º grau, com as mesmas funções alterar apenas o expoente.

Lourenço: conclusão, as de 2º grau podem não ter zeros, as de 1º grau têm sempre 1.

Ao nível da interacção entre a Marta e o Lourenço, nota-se que ele dominou a redacção das conclusões mas a metodologia de investigação seguida foi proposta pela Marta. O Lourenço mostrava-se atento às sugestões dadas pela Marta e conduzia a investigação para a confirmação das suas afirmações:

Marta: vou usar as mesmas funções e mudar só o expoente.

Esta só tem um zero!

Lourenço: estava a pensar como poderia ser só um zero, no 2º grau?

Catarina: é uma função quadrática.

Lourenço: esta actividade é fácil, isto é, é das mais fáceis.

Marta: pode chegar aqui, professor?

Lourenço: aqui deu um número e eu fiz uma aproximação.

Marta: (dirigindo-se a mim) Cálculo os zeros? Com fórmula resolvente?

Eu: Quantos têm ou quais são, qual a diferença?

Catarina: tu escreves como Lourenço, uma aproximação?

Marta: a conclusão é que função do 2º grau tem 1, 0 ou 2 zeros.

Lourenço: para ter um zero basta que X^2 esteja sozinho.

Catarina: ou o X ? (referindo-se à expressão $Y=aX^2+bX+c$)

A Marta e o Lourenço acabaram por generalizar a questão e chegar à conclusão de que o número máximo de zeros é igual ao expoente do termo de maior grau da expressão que define a função. No entanto, nem um nem o outro fazem referência ao facto de as funções de grau ímpar terem sempre um zero e das funções de grau par poderem não ter zeros.

Durante a discussão, depois de entregar os relatórios elaborados nas duas aulas anteriores com o respectivo feedback, os alunos mostraram que tinham retido muitos conhecimentos acerca da exploração efectuada e referiram ter apreciado o conteúdo da tarefa proposta:

Ajuste da janela para ver os zeros de uma função;

Consolidação do número de zeros de uma função afim;

Apreensão do número máximo de zeros de uma função quadrática;

Consolidação do facto de uma função de grau 2 corresponder a uma parábola;

Consolidação do facto de uma função de grau 1 corresponder a uma recta;

Verificação da influencia do parâmetro a no gráfico de $Y=aX^2+bX+c$;

Capacidade de comunicação gráfica, indicação correcta da representação gráfica, nomeadamente dos pontos de intersecção com os eixos;

Elaboração de raciocínios de nível superior (por exemplo: se é uma parábola, pode estar em diferentes posições relativamente aos eixos, logo pode ter 0, 1 ou 2 zeros);

Capacidade de argumentação acerca da defesa de um ponto de vista (por exemplo: uma função de grau 3 tem sempre zeros). (Diário de bordo, 31/3/2004)

Na minha opinião, a discussão não passou de uma mostra de conclusões. As conclusões que eram unânimes, as conclusões que todos tinham chegado, não geraram controvérsia. As outras, a que só alguns tinham tido acesso surgiram sem significado para quem não as tinha obtido – como se fosse mais uma informação adicional. Nesta

actividade de investigação verifiquei que os alunos trabalharam cooperativamente, no seio do grupo, de uma forma mais intensa do que nas actividades anteriores o que sugere que a cooperação e a interacção está dependente da tarefa proposta. Outras duas situações serviram de debate na discussão e de alerta aos alunos: (1) foi necessário discutir com os alunos o problema que surgiu ao Ruben, a calculadora gráfica não identificar o zero da função, e que serviu para que todos percebessem o papel da necessidade de usar processos analíticos para complementar as informações dadas pela calculadora gráfica; (2) foi necessário discutir com os alunos o facto de existirem aprendizagens que tinham acontecido e que não estavam registadas nos relatórios, o que serviu para explicar-lhes que é necessário comunicar e mostrar aos outros os conhecimentos dominados.

Após a leitura dos relatórios sobre a actividade desenvolvida, tomei notas sobre alguns aspectos que considere importantes na altura e sobre os quais reflecti:

Tendo reagido bem ao desenvolvimento da tarefa, nota-se que os alunos vão desenvolvendo hábitos de trabalho em actividade de investigação à medida que o tempo vai passando. Os alunos continuam a ter dificuldade em provar as suas conjecturas depois de as testar e a prova só se encontra ao alcance de alguns. A interpretação desta tarefa não gerou grandes complicações, talvez pelo seu reduzido texto. (Diário de bordo, 31/3/2004)

Os aspectos salientados realçam a progressão dos alunos no processo de ensino aprendizagem, a problemática da prova das conjecturas e a questão da comunicação.

Tarefa 4: Uma investigação com funções cúbicas

Descrição e implementação da tarefa

A decisão de utilizar a tarefa *Uma investigação com funções cúbicas* surgiu da ponderação de vários factores: (i) os alunos terem realizado de forma autónoma, como trabalho para férias da Páscoa, o estudo da família de funções $Y=aX^2+bX+c$; (ii) ser necessário verificar as competências adquiridas no domínio do estudo intuitivo de propriedades de uma família de funções usando a calculadora gráfica; (iii) esta actividade de investigação permitir diferentes tipos de aprendizagens, assim como a consolidação de conceitos e conhecimentos, nomeadamente, generalizar a influência de parâmetros existentes nas expressões e o respectivo efeito no gráfico; e (iv) possibilitar

um ponto de partida para o estudo das transformações de funções e para o estudo das funções polinomiais.

A minha primeira perspectiva foi colocar a tarefa de investigação da seguinte forma:

Faz um estudo da função cúbica $y = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

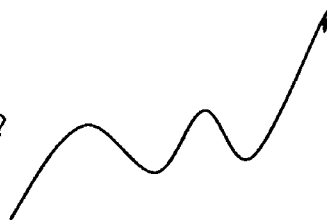
Mas, após algum tempo de reflexão e pesquisa, ponderando os factores que me levaram a optar por esta tarefa, analisando as fichas de trabalho nº 7 e nº 8 (funções, 7º e 8º anos) do MAT₇₈₉ (Abrantes et al., 1997a), consultando os livros Matemática ao Virar da Esquina (Roque & Cruz, 2001) e Funções – 10º ano de escolaridade (Teixeira et al., 1997), optei pela tarefa constante na brochura do DES (anexo VII) porque inclui vários pontos com sugestões de investigação:

Este pode ser o gráfico de uma função quadrática?

E cúbica?

Porquê?

Investiga e elabora um relatório o mais completo possível da tua investigação.



As diferentes sugestões iriam permitir avaliar o uso da calculadora gráfica (em particular a utilização de janelas de visualização), a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções (no caso de funções polinomiais), as propriedades de funções (domínio, contradomínio, zeros, monotonia, continuidade, etc.), para além da comunicação matemática, formular e prever resultados, formular generalizações a partir de experiências e validar conjecturas.

Para permitir a cada aluno uma maior compreensão sobre o desenvolvimento de capacidades e conhecimentos, resolvi limitar o número de elementos por grupo a dois. Trabalhando em diade existe a possibilidade de comunicação e interacção, no entanto, cada aluno poderá realizar de forma mais significativa uma auto-avaliação e auto-regulação das suas aprendizagens.

Desenvolvimento da actividade de investigação

A investigação proposta foi programada para três aulas, incluindo a discussão. A primeira aula é de turno, com metade dos alunos em cada turno, depois uma aula com

todos os alunos para continuação da investigação, sendo a entrega do relatório realizada no final da segunda aula. Na terceira e última aula, foi prevista a realização da discussão tendo por base a devolução dos relatórios com o respectivo feedback. A primeira aula era de turno e estiveram presentes 11 alunos. Esta caracterizou-se por uma grande agitação dos alunos ao desenvolver a referida investigação. A agitação manteve-se durante toda a aula e justifiquei-a com os hábitos adquiridos pelos alunos na concretização deste tipo de tarefas. No segundo turno, os 8 alunos presentes encontravam-se mais calmos, mas com o decorrer da investigação a agitação acentuou-se.

No início de ambas as aulas de turno, os alunos foram esclarecidos que iriam trabalhar em grupos de dois elementos e que cada um elaboraria o seu relatório de investigação para entregar no final da aula:

O processo é o habitual: entregar numa folha à parte no final da aula de hoje e depois devolverei no início da próxima aula para continuarmos. Podem fazer em grupos de dois, mas cada um entrega o seu relatório.

Alguns alunos manifestaram preocupações com o tempo que dispunham para realizar a actividade de investigação e com a elaboração do relatório:

Tiago: Relatório?

Eu: Sim, um documento sobre a realização da tua investigação e as tuas conclusões.

André: para entregar hoje?

Eu: Não. Para começar hoje. Entregam no final da aula e depois amanhã terminam.

Os alunos acabaram por usar a primeira aula para explorar as características gerais das funções cúbicas e a segunda aula para a redacção do relatório, assim como para o estabelecimento e prova de conjecturas.

Os alunos receberam a folha que continha a proposta de investigação de funções cúbicas e os que não possuíam calculadora gráfica própria foi-lhes entregue uma calculadora gráfica que pertence à escola, desta forma, cada aluno tinha uma calculadora gráfica.

A generalidade dos alunos iniciou a investigação respondendo à questão “este pode ser o gráfico de uma função quadrática?”

Lourenço: Quadrática não pode ser! Olha (dirigindo-se ao João) isto é uma função quadrática. É uma parábola.

Rita: Não é uma função quadrática pois estas são sempre parábolas.

André: Quadrática, claro que não. As quadráticas são sempre parábolas não precisamos justificar.

Marta: Quadrática é uma parábola.

O Lourenço, entre outros alunos, estabeleceu de imediato a relação entre esta investigação e a investigação realizada no âmbito das funções quadráticas:

Lourenço: Cúbica? Poderá ser? As quadráticas fazem assim, o trabalho de férias foi sobre as funções quadráticas.

João B.: $Y = X^3$

Lourenço: não estás a aperceber? (experimentando $Y = X^3$ e $Y = -X^3$)

João: Tens de representar isso? Para que é esses números todos?

Lourenço: Este não diz. Mas o outro trabalho de férias dizia para identificar as intersecções com os eixos. É importante indicar os zeros analiticamente!

Por sua vez, a Marta não percebia qual o papel que tinha a sugestão dada na folha que continha a proposta:

Seguimos estes pontinhos, Stor'?

Temos de concretizar para valores concretos, podemos fazer o estudo e no fim dizer se é cúbica ou não.

Após estas questões preliminares, os alunos iniciaram a investigação sobre o tipo de gráfico que se encontrava na proposta. Todos os alunos estudados, nesta investigação, seguiram a sugestão dada na proposta de trabalho. Também pude constatar que os outros alunos da turma seguiram a mesma metodologia.

Durante o processo de investigação existiram três aspectos dignos de nota:

1) Estudo da influência do parâmetro a na expressão $Y = a X^3$:

O Lourenço estudou os zeros, os intervalos de monotonia, o domínio, o contradomínio, os extremos, o sinal e a continuidade das funções cúbicas $Y = X^3$ e $Y = -X^3$. Registou no relatório os resultados obtidos e não se referiu a nenhuma conclusão globalizante. No entanto, referiu-a oralmente: “o outro é igual só que é ao contrário, é os mesmos resultados. Quando X^3 é negativo troca”.

A Rita estudou também as mesmas características gerais e as mesmas funções que o Lourenço e acrescentou-lhe a injectividade e o estudo de sinal. Não registou uma conclusão global, mas oralmente referiu o processo usado: “vamos começar, primeiro X^3 . Só X^3 . - X^3 é o simétrico e vai para baixo”.

O André estudou as mesmas funções e as mesmas características sem registar conclusões, mas referiu-se à conclusão da seguinte forma: “vai para cima é crescente, se x aumenta e y aumenta, cresce!”

A Marta estudou as funções $Y=2 X^3$ e $Y=-2 X^3$ e registou os resultados relacionados com os zeros, o domínio, o contradomínio, a monotonia e a continuidade. Não registou conclusões, mas referiu-se-lhes da seguinte forma:

É ao contrário, é ao contrário, o negativo é simétrico ao positivo X^3 e $-X^3$. É igual. Já experimentei $9 X^3$, $5 X^3$. Dá sempre igual!

De salientar que os dois exemplos referidos oralmente pela Marta, $9 X^3$ e $5 X^3$, não se encontram registados no relatório.

2) Estudo de $Y=(X-2)^3$ e $Y=X^3-2$:

O Lourenço repetiu o estudo com base nas características que já tinha usado, mas desta vez registou no relatório o seguinte:

Nos últimos quatro gráficos pude concluir que na expressão $Y=(X-h)^3$ o valor de h dá o valor de X [abscissa] do ponto de intersecção com o eixo OX ; e que na expressão $Y=X^3+h$ o valor de h dá o valor de Y [ordenada] do ponto de intersecção com o eixo OY .
(Relatório do Lourenço, 27/4/2004)

A Rita e o André estudaram as características já estudadas nos exemplos anteriores e voltaram a não registar conclusões. A Marta também estudou as características estudadas nas experiências iniciais, no entanto é de salientar os momentos significativos de interacção existentes no seu grupo com vista à realização de muitas experiências:

Marta: $(X-2)^3$ e X^3+2 , isto dá igual temos de fazer na mesma.
 $(X-2)^3$, aposto que o zero é o 2, é o contrário do que está na expressão. Tinha razão! Conclusão?
O que podemos alterar? Na primeira pode-se alterar.

Miguel: Alteramos para 3 e o zero vai dar 3. Olha lá quando $Y=0$ é quando passa no X , então é os zeros. E agora?

Marta: AHHH vês, qual?

Miguel: Fizeste essas curvas todas.

Marta: Ah, pois é. Esta já diferente, Assim Stor ou isto tem muita curva, Stor?

3) As conjecturas e as conclusões:

O Lourenço refere a uma colega que tem “quatro conjecturas” e explica-as. Para ele as quatro conjecturas correspondem aos quatros aspectos que podem apresentar o gráfico de uma função cúbica:

Lourenço: Vamos comparar! Encontrei 4 conjecturas e vocês?

Catarina: Vamos ver.

Lourenço: Sabem o que são conjecturas?

Catarina: Diz

Lourenço: São os desenhos que pudemos efectuar. As conjecturas podem parecer sempre iguais, parecem, mas não são, algumas fazem tipo um \underline{s} e depois volta a atrás, decresce e depois volta a crescer.

Catarina: como se chama a curva

Lourenço: Essa tem de ser elevada a quatro!

Catarina: tem sempre um zero, é uma conjectura?

Lourenço: É uma característica das cúbicas.

Catarina: As que não têm zeros não podem ser as funções cúbicas?

Lourenço: Isto é sempre a mesma coisa.

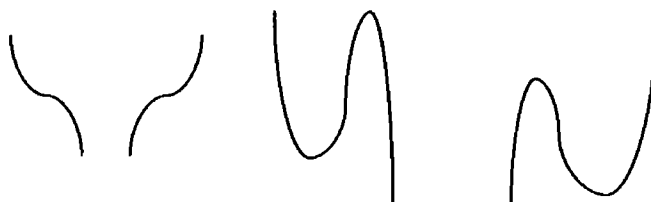
Catarina: Há sempre um zero! Ainda não encontrei com 2. Mas há?

Lourenço: Tem de haver, faz assim, olha aqui, faz 2, um, dois!

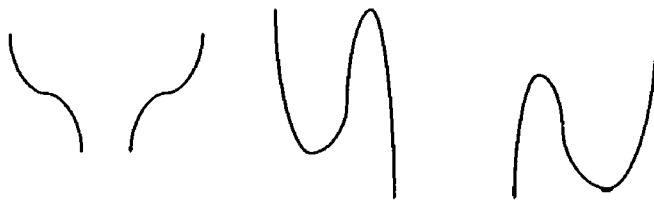
Catarina: e com três?

O Lourenço, no relatório registou as da seguinte forma:

Conjecturas de uma função X^3



Conclusão: Este gráfico não pode ser uma função cúbica, pois todas as funções cúbicas têm as seguintes representações:



Por sua vez, a Rita referiu-se à função cúbica como um conjunto de características próprias de uma família de funções:

Apresenta sempre domínio e contradomínio \mathbb{R} , é sempre contínua e injectiva, pode ter até 3 zeros, nunca tem extremos absolutos; Quando o termo dominante é X^3 é crescente, quando é negativo é decrescente; Numa função do tipo $(X - a)^3$ ou $(X + a)^3$, a é o simétrico da abcissa do ponto que intercepta o eixo das abcissas, ou seja, o zero; numa função do tipo $X^3 + a$ ou $X^3 - a$, a é a ordenada do ponto que intercepta o eixo das ordenadas; numa função cúbica, o d é a ordenada do ponto que intersecta o eixo das ordenadas; quanto maior é o valor de c menos acentuada é a curva da função. (Relatório da Rita, 27/4/2004)

O André, depois de explorar as funções $Y = X^3 - 3X^2 + 2X$, $Y = X^3 - 3X^2 + 2X + 2$ e $Y = X^3 - 3X^2 + 2X - 2$, designou por hipérbole a linha que representa o gráfico de uma função cúbica e conclui o seguinte:

Quando têm os 3X (X^3 , X^2 , X) mas não tem o quarto elemento, a curva intercepta o eixo OX na origem; Quando acrescentamos o quarto elemento (somar) a curva dá-se acima do eixo OX , quando se subtrai o quarto elemento a curva dá-se abaixo do eixo OX . Onde o eixo OY é interceptado pela hipérbole é o mesmo valor do quarto elementos. (Relatório do André, 27/4/2004)

A Marta e o seu colega de trabalho seguiram o processo de encontrar semelhanças entre as diferentes curvas da função cúbica:

Marta: E agora vamos fazer variar o a , b , d e d , alternadamente
Miguel: vamos a um valor positivo de a e negativo separadamente.
Marta: Dar um valor ao X^3 , vamos fazer o mesmo que há bocado.
Miguel: altera-se o a , depois altera-se só o b . Como é que escreveste, as características?
Marta: Escrevi, uma curva de domínio \mathbb{R} e contradomínio \mathbb{R} ; crescente e decrescente. Vais dizer que uma linha que parece um “pulo”
Eu: Se quisessem descrever como é o gráfico de uma função cúbica? Com faziam?

No relatório, a Marta, apresentou vários gráficos de funções cúbicas, com o $A=B=C=D=2$. Depois alterou os valores $A=4$ e $B=C=D=2$, $A=C=D=2$ e $B=6$, $A=C=D=2$ e $D=5/2$ e $A=B=C=2$ e $D=-5$ e, referindo-se ao aspecto do gráfico, chegou à seguinte conclusão:

Apenas posso concluir que uma função cúbica é representada sempre pela tal “linha” que tem uma curva, apesar de não ter observado nenhuma com mais de duas curvas, suponho que será possível uma função tê-las até infinitamente. (Relatório da Marta, 27/4/2004)

É de salientar que os alunos, principalmente a Rita e o André, realizaram uma aprendizagem muito significativa acerca das transformações de funções, sem que elas tenham sido abordadas nas aulas, até ao momento em que ocorreu esta investigação.

Perante o que ocorreu na actividade de investigação, considerei o trabalho desenvolvido pelos alunos muito positivo. Ao nível do uso da calculadora, pude constatar que os alunos já não me solicitaram para alterar as janelas da máquina nem para introduzir expressões algébricas ou visualizar gráficos. A este nível tentei introduzir novas capacidades, como o uso da tabela de valores. Na comunicação escrita ainda existe algum trabalho a realizar, os alunos usaram a simbologia e a linguagem matemática correcta mas não explicam de forma clara as conjecturas efectuadas e os motivos que levaram à aceitação ou à rejeição das mesmas, embora elas existam como pude verificar e registar em gravação de áudio. Relativamente aos conhecimentos, os alunos usaram frequentemente o caderno e o livro com ferramentas de consulta e de auto-regulação da aprendizagem.

Síntese do capítulo

As experiências de aprendizagem na sala de aula têm várias finalidades no processo de ensino e aprendizagem. Qualquer experiência, que o professor realize, pretende provocar o desenvolvimento da actividade cognitiva do aluno, com vista à aprendizagem. O significado que o aluno atribui à tarefa que lhe é proposta nem sempre é a mesmo, alguns alunos são mais sensíveis a tarefas que se relacionam com a geometria, outros preferem tarefas que apelam ao uso de tecnologias. No contexto deste estudo, a percepção destas sensibilidades funciona como um factor de favorecimento à concretização de um modelo de avaliação reguladora. A actividade desenvolvida pelo

aluno é um meio para desencadear a reflexão, a regulação e a auto-avaliação das aprendizagens.

Na programação das tarefas, solicitadas aos alunos, foi necessário um trabalho de pesquisa de recursos em vários locais: no programa da disciplina (tarefa 1, *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*; e tarefa 4, *Uma investigação com funções cúbicas*); na Internet (tarefa 2: *Pavimentações*); nos livros de apoio à concretização do programa (tarefas 1 e 4 e tarefa 3, *Zeros de uma função polinomial*); e nos livros específicos da educação matemática (tarefas 2 e 4). Das quatro tarefas propostas apenas as duas primeiras foram adaptadas e as duas últimas foram propostas nos mesmos termos que surgem no livro Funções (Teixeira et al., 1997). As tarefas 1 e 2 foram adaptadas em virtude de não conseguir encontrar a formulação que pretendia para os meus alunos, tanto ao nível da linguagem com pouco formalismo simbólico que habitualmente era usada pelos alunos, como ao nível da inclusão de imagens de apoio ao desenvolvimento da actividade investigativa do aluno.

As tarefas foram propostas sempre em suporte de papel. Pretendia assim, possibilitar a sua interpretação e a reorientação do trabalho quando surgissem desvios. Nas tarefas 2, 3 e 4 existiu a necessidade explícita da exploração incluir recursos tecnológicos. A calculadora gráfica como um auxiliar fundamental nas actividades que envolvem funções e as suas propriedades e o computador, através do AGD, nas de geometria. No caso dos computadores o trabalho foi mais difícil. A dependência das ligações à Internet ou a própria especificidade dos programas informáticos aumentaram o risco de não se concretizar a tarefa nos termos em que tinha sido programada. Tal veio a implicar a adaptação da dimensão dos grupos de trabalho para a tarefa 2.

A reacção dos alunos às tarefas propostas foi satisfatória. No entanto, os próprios manifestaram uma crescente apetência pelas actividades de investigação à medida que o tempo passava e eram confrontados com um maior número de tarefas deste tipo. A dificuldade inicial de interpretação da tarefa verificou-se para alguns alunos, e na maior parte das vezes subsistiu em mais do que uma tarefa. Outros ultrapassaram essa dificuldade estabelecendo uma ligação entre os conceitos expressos no texto da proposta de trabalho e os conceitos que tinham adquirido noutras actividades.

A actividade dos alunos divergiu consoante a tarefa e as interacções que cada um estabeleceu no seio do grupo de trabalho. Na tarefa 1, os alunos avançaram pouco na redacção de conclusões. Alguns apenas concluíram acerca do tipo de quadrilátero que

podiam obter, como é o caso de um grupo que colocou o quadrilátero num referencial cartesiano e confrontou-se com a dificuldade de efectuar alguns cálculos, o que não se revelou uma estratégia compensadora para eles.

Na tarefa 2, explorada em AGD, os alunos não tiveram dificuldades no uso do AGD. As suas dificuldades surgiram ao nível dos conhecimentos acerca das definições matemáticas e das propriedades dos polígonos regulares. Foram vários os alunos que, erradamente, classificaram o losango como polígono regular. Nas tarefas 3 e 4, a exploração com a calculadora gráfica aumentou a realização dos alunos, quer ao nível da quantidade de exemplos explorados, quer ao nível da profundidade das conclusões obtidas. Na tarefa 3, mais do que um grupo de alunos generalizou a situação ao afirmar que uma função polinomial de grau ímpar tem sempre, pelo menos, um zero. E na tarefa 4, alguns alunos apresentaram nas suas conclusões um resumo dos quatro tipos de gráficos de uma função cúbica.

Nas interacções estabelecidas, alguns alunos solicitaram-me muito pouco, assim como aos colegas do grupo de trabalho, desenvolvendo um trabalho mais individual. Outros opõem-se pela cooperação que estabelecem no seio dos grupos de trabalho. Mesmo quando avançam nas suas investigações, os alunos têm a preocupação de explicar aos outros como avançam e que conclusões obtêm.

Os alunos procuram estabelecer interacções comigo, com os seus pares ou com materiais, quando têm necessidade de ultrapassar dificuldades ou quando, ao reflectir sobre o seu trabalho investigativo tomam consciência de erros cometidos ou de conhecimentos que não dominavam. Esta procura do saber, ou do domínio de técnicas, incentivou os alunos a se tornarem autónomos na regulação das suas aprendizagens.

A organização em grupos de trabalho resultou na sua plenitude. Confirmei que em grupo, os alunos, têm a possibilidade de explicar aos outros o que estão a investigar, como o fazem e porque o fazem. Isto permite-lhes, não só, o desenvolvimento das suas capacidades como também as dos outros que com eles interagem. Outra forma benéfica de reflexão sobre o trabalho realizado foi a solicitação do relatório individual sobre a actividade investigativa desenvolvida. Através dos relatórios escritos, os alunos tiveram oportunidade de explicar o seu percurso de investigação, reflectir sobre os seus erros e dificuldades e verificar como reorientam o seu trabalho de forma a prosseguir a sua investigação. Também é verdade que nos relatórios os alunos não incluem tudo o que fazem, por exemplo, alguns fazem conjecturas, discutem-nas e não as incluem no relatório escrito.

Na discussão das conclusões sobre o trabalho realizado, verifiquei que as conclusões só faziam sentido para os alunos que tinham contactado com elas. Por exemplo, para os alunos que não tinham concluído que uma função polinomial de grau ímpar tem sempre um zero, aceitaram-na como verdadeira, mas não lhe atribuíram o mesmo significado que os outros. Estes alunos, quando foram confrontados com a generalização para funções de grau par, tiveram dificuldade em referir que as funções polinomiais de grau par podem não ter zeros.

CAPÍTULO V

O ANDRÉ

Apresentação

O André tinha quinze anos no início do ano lectivo 2003/2004, é moreno, cabelo preto e curto, olhos castanhos. Chegou à turma uma semana depois das aulas começarem. Confidenciou-me que solicitou transferência para a sua nova turma por ter afinidades com alguns alunos. É um aluno do tipo que normalmente é classificado pelos professores como um aluno com bastantes capacidades mas que devido à sua falta de trabalho não as rentabiliza. Eu acrescentaria que também devido à sua infantilidade. Pouco consciente da necessidade de obter boas classificações no ensino secundário e sem horizontes definidos acerca da sua continuação de estudos, o André vai frequentando a escola sem grandes preocupações. Nesta investigação, foi considerado como um “bom” aluno e os resultados assim o justificam. No seu percurso escolar sempre transitou sem dificuldades e com classificação positiva a Matemática, nos níveis três e quatro. Outros factores, também, influenciaram a sua inclusão neste estudo: o facto de ser um aluno que reflecte sobre a sua aprendizagem e sobre as diferentes etapas do desenvolvimento de uma actividade, colocando em causa sistematicamente cada uma delas; ser um aluno participativo em que se nota a facilidade de comunicação na aula e sobre os diferentes aspectos da mesma; e ser um aluno que reconhece e aprecia o desenvolvimento de actividades de investigação.

Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem

Sobre a matemática, o André afirma tratar-se de uma ciência fundamental à nossa vivência e que através dela poderíamos explicar muitas situações do nosso dia a dia. No entanto, não conseguiu especificar essa associação. Acrescentou que é uma ciência difícil de compreender nas suas aplicações a curto prazo e que apenas a longo prazo podemos encontrar aplicações claras. Defendeu a perspectiva de que, no terceiro ciclo e ensino secundário, os alunos não percebem a utilidade dos conteúdos que aprendem, mas no futuro cada aluno encontraria aplicação para os conteúdos já estudados:

Agora como aluno, por enquanto, é um bocado chato. Não se para que serve a matemática, nem consigo perceber a razão de a estudar. É um bocado complicado. Depois vendo bem, mais tarde, na nossa

profissão, quando vamos à procura de algo, vemos que a matemática consegue nos ajudar. (Entrevista ao André, 28/11/2003)

O seu gosto pela disciplina depende daquilo que está a executar, ou seja dos conteúdos a estudar ou das actividades que lhe são solicitadas. Dai que as tarefas de investigação ganhem significado, uma vez que as mesmas proporcionam um tipo de trabalho em que é necessário reflectir, encontrar uma solução e ajudar a construir métodos para aplicar na resolução de problemas reais:

Eu gosto, porque nos fazem pensar [reflectir], obriga-nos a pensar numa solução, a arranjar uma solução. Pronto, não posso deixar de dizer que são bastante difíceis, por vezes não gostava que o fossem, mas eu gosto. Ajuda-nos a encarar problemas assim do dia a dia, por exemplo áreas e isso, se quisermos calcular alguma coisa do dia a dia aquilo ajuda-nos a ter um método para fazer as investigações, até encontrar. (Entrevista ao André, 28/11/2003)

Quando o André começa a falar da avaliação, a preocupação imediata recai na valorização que os professores de Matemática fazem das notas dos testes. Para justificar este desconforto, o André refere-se à folha distribuída no início do ano lectivo onde eram explicitados os critérios de avaliação:

Os testes são o que os professores [referindo-se a várias disciplinas] dizem. Nas fichas que os professores nos dão com a avaliação, os testes na nota final valem sempre 50, 60 %, por vezes até 80%. (Entrevista ao André, 28/11/2003)

Perante a questão da valorização de outros instrumentos de avaliação, o aluno referiu que é importante avaliar mesmo que isso se faça através de testes e sob a pressão de estar perante uma prova. No entanto, como alternativa, indicou as tarefas realizadas na aula, em que o professor avalia o trabalho desenvolvido de uma forma global.

Para o André, a avaliação formativa resume-se a uma preparação para os testes. Sendo um aluno que afirma não estudar, acaba por ter uma atitude de avaliação formativa na véspera dos testes:

Quando me lembro de preparar para os testes! Só estudo mesmo nessa altura. Passo uma vista de olhos pelas coisas, tento ver bem como são as fórmulas, como elas se podem aplicar nesta situação, como elas se transformam noutras. Quando eu começo a ver que os problemas se

tornam fáceis de fazer, consigo realizá-los bem, acho que já os sei. Penso nas fórmulas e associo as fórmulas a alguma coisa. (Entrevista ao André, 28/11/2003)

As questões colocadas no teste e as desenvolvidas nas aulas são muito parecidas para ele, mas acrescentou que por vezes no teste aparecem conteúdos que antes não tinham sido associados pelos alunos e pelo professor, o que complica a resolução. Este facto levou-o a concluir que aprende sempre menos do que aquilo que é explorado na aula. O que significa dizer que não estabelece as necessárias conexões entre o que é solicitado nos testes e o que foi realizado nas aulas, isto em virtude de não ter pensado convenientemente no assunto antes de chegar aos testes:

... por isso é que continuamos a ter algumas coisas erradas. Pensamos que aprendemos só nas aulas, mas afinal não aprendemos o suficiente para resolver qualquer questão. Terei de pensar também em casa. Trabalhar mais! (Entrevista ao André, 28/11/2003)

Uma resposta curiosa do André foi a dada à questão: se tu fosses professor de Matemática, como fazias para que os alunos aprendessem verdadeiramente? O André respondeu prontamente: “A solução!” O que denota claramente a consciencialização que o aluno tinha da inexistência de uma forma óptima de ensinar e avaliar, manifestando-se, também, consciente da existência de uma grande diversidade de alunos e de formas de aprender.

O erro foi visto pelo André como um castigo, como uma forma de o alertar para a necessidade de estar com mais atenção às questões colocadas. Atribuiu a sua existência à pressão que é exercida sobre os alunos. Mais uma vez, referindo-se aos testes:

Castigo-me entre aspas. Às vezes são coisas que eu não percebi, mas depois quando olhei para o teste penso assim: “é mesmo burro”. Eu sabia fazer isto. É devido à pressão! (Entrevista ao André, 28/11/2003)

Também considera que os erros têm um valor pedagógico e formativo: “outras vezes tento corrigir as coisas, depois começo a perceber melhor”.

Para o André, foi fácil a adaptação ao 10º ano e à escola secundária. Não encontrou grandes diferenças entre este nível de ensino e o 3º ciclo. Também, no que

diz respeito à Matemática, o aluno não encontrou diferenças significativas. Para ele, as aulas são muito parecidas e o professor continua a apoiar os alunos nas tarefas da aula e nos trabalhos de casa. Este aspecto contraria as suas expectativas relativamente ao ensino secundário:

Não era nada do que eu pensava! O que eu pensava era que os professores não nos diziam nada, davam a matéria e pronto. Quem apanhasse apanhava. (Entrevista ao André, 28/11/2003)

O aluno, ainda, afirmou que não estuda Matemática. Limita-se a rever os exercícios antes dos testes e nessa ocasião pergunta aos pais ou procura ultrapassar as dificuldades, recorrendo à colocação de dúvidas nas aulas. O livro e a Internet são recursos salientados quando não consegue dispor de uma ajuda mais directa e pessoal:

Pergunto aos meus pais que por vezes me ajudam e também pergunto ao professor. Conto consigo. Se o professor me conseguir explicar bem, se não!... Consulto a Internet, no que me pode vir a ajudar porque tem lá as fórmulas, tudo muito resumido e explica-nos como devemos proceder em algumas coisas. (Entrevista ao André, 28/11/2003)

Actividade de investigação e avaliação

Interpretação da tarefa

A primeira abordagem do André, às propostas de investigação, é caracterizada por vários avanços e recuos ao nível da leitura e da interpretação. O André lê cada palavra como estivesse a necessitar de interiorizar o seu significado antes de passar à palavra seguinte. Algumas das palavras que lhe criaram embaraço foram “conjectura” na primeira tarefa, “regular” na segunda tarefa e “investigação” na quarta tarefa. Relativamente a “regular”, a não percepção da palavra está claramente relacionada com o não estabelecimento da relação entre pavimentação regular e polígono regular, ou seja, a não transposição da linguagem materna para a linguagem matemática (Bernardin, 1997). Já as outras duas palavras, associam-se a um tipo de tarefa com que o aluno não se encontrava familiarizado, mas também me parece que as suas dificuldades de interpretação, neste contexto, estão relacionadas com o não desenvolvimento de algumas competências de comunicação.

Para ultrapassar as dificuldades iniciais, o André solicitou a tradução da tarefa por outras palavras. O termo “conjectura” foi-lhe explicado por mim. E os outros dois

foram esclarecidos através de uma leitura mais atenta da proposta, sugerida por mim, e em interacções com os outros alunos:

[Em *Pavimentações*]

André: Pavimentações regulares. Regulares?

Pedro: Regulares são aquelas em que o ladrilho é formado por um polígono regular.

André: Ahh! Com uma nova figura, o quadrado, o trapézio, o triângulo experimenta-se.

[Em *Uma investigação com funções cúbicas*]

Andreia: As quadráticas são sempre parábolas, não precisamos justificar.

André: Não é isso! Uma investigação? Como se faz isso da investigação?

Andreia: Olha! Responde às sugestões e no fim olhas para tudo!

Depois de ultrapassar a dificuldade inicial de perceber o que é solicitado na proposta, que está relacionado com o conhecimento de estratégias ou com competências de comunicação, o aluno procura definir qual é o caminho que deve usar para desenvolver a sua investigação matemática.

Em todas as tarefas usadas como instrumento de recolha de dados para este estudo, o André manifestou dificuldade em definir um percurso de desenvolvimento da sua actividade. Para a ultrapassar, o André recorreu sistematicamente a dois processos: a pesquisa no caderno diário e a procura de interacções com os colegas ou com o professor. O primeiro é a pesquisa no caderno diário, na tentativa de encontrar alguma exploração ou algum registo de conteúdos parecidos com a investigação proposta. A pesquisa no caderno diário foi-lhe útil nalgumas tarefas. Mas, apenas para encontrar alguns esclarecimentos relacionados com definições matemáticas. Por exemplo, no caderno diário encontrou a definição de polígono regular que lhe foi útil na tarefa *Pavimentações*. Também, encontrou o trabalho que foi realizado nas férias sobre a função quadrática, o que lhe serviu para responder de imediato se o gráfico apresentado, em *Uma investigação com funções cúbicas*, representa ou não uma função quadrática. O outro, é a procura de interacções com os colegas ou com o professor de forma a ficar esclarecido sobre a forma de avançar e o tipo de conhecimentos e estratégias a aplicar. Vejamos o que sucedeu na primeira tarefa, *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, em que o grupo do André resolve colocar o quadrilátero num referencial cartesiano:

André: Num referencial, tiramos as coordenadas dos pontos e dá.

Pedro: Mas espera aí, qual é o quadrilátero que vais usar?

Andreia: Acho que isso não leva a lado nenhum.

André: Porquê? Stor, pode chegar aqui?

Na minha intervenção, não alterei a estratégia que o grupo adoptou. Mas verifiquei que as dificuldades do grupo e do André foram aumentando gradualmente, mesmo quando a Andreia questionou a necessidade do referencial:

Andreia: Podemos marcar os pontos médios sem saber as suas coordenadas, olha aqui.

André: E podemos fazer assim?

[O André resolve confirmar, como é que outro grupo está a fazer] Débora? Débora? Têm referencial ou não?

A partir do momento que soube que o grupo da Débora não estava a usar os referenciais cartesianos, o André passou a investigar sem colocar os quadriláteros em referenciais, voltando ao ponto de partida.

Também nas outras tarefas, as interações no seio do grupo, acompanhadas da minha confirmação, foram fundamentais para que o André ultrapassasse as dificuldades iniciais no estabelecimento de um percurso de investigação:

[*Pavimentações*]

André: Pavimentações regulares são aquelas em que...

Pedro: Na folha, pavimentam com polígonos regulares.

André: Vamos explorar os polígonos regulares que estão na figura. Stor?

Eu: Sim.

André: Podemos ver primeiro os regulares e depois começar a misturar?

Eu: A investigação é vossa!

[*Zeros de uma função polinomial*]

André: Temos de ter em atenção as excepções, tem zero positivo ou negativo, consoante o m ?

Tiago A.: É isso, temos de tirar conclusões.

André: Mas, grau 2 tem sempre 2 zeros!

Francisco: Grau 2, vamos experimentar, calma!

[*Uma investigação com funções cúbicas*]

André: Função quadrática?

Andreia: Esta não pode ser!

André: Quadrática? Claro que não! Como se faz a investigação?

Andreia: Começamos por ajustar a janela da calculadora!

O André valorizou o trabalho de grupo como forma de ultrapassar estas dificuldades iniciais, e salientou o facto da investigação ser realizada em parceria com os vários elementos do grupo, como uma forma de corrigir, também, os desvios que possam aparecer no início:

Quase todas as intervenções feitas pelos meus colegas foram importantes para a minha orientação, pois várias cabeças a pensam melhor do que uma e assim podíamos ajudar e alertar mutuamente acerca de um raciocínio incorrecto. (Reflexão escrita do André, 31/3/2004)

Aparentemente, e como sucede com outros alunos, as dificuldades iniciais poderiam influenciar o trabalho de exploração e investigação que se seguia. Mas, na realidade não acontece. O André, depois de perceber o que tem que fazer, desenvolve e investiga sem se mostrar afectado pelas dificuldades de interpretação.

Desenvolvimento da tarefa

As diferentes tarefas que foram propostas aos alunos para a realização deste estudo, não tiveram sempre o mesmo tipo de resposta por parte do André. Na primeira, *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, revelou-se como uma tarefa muito difícil de explorar, para o André e para o seu grupo de trabalho, principalmente, porque a sua estratégia inicial foi a de colocar os quadriláteros num referencial cartesiano. Esta opção de investigação revelou-se pouco vantajosa para este grupo, uma vez que a partir das primeiras explorações não conseguiam encontrar um padrão entre os diferentes quadriláteros obtidos, nem podiam generalizar a todos os quadriláteros as conclusões que obtiveram para casos particulares.

Nas outras tarefas, o André também não seguiu um processo de estabelecimento de conjecturas, realização de experiências e redacção e confirmação de conclusões. Pelo contrário, segue um processo de exploração/avaliação, onde vai desbravando o caminho e investiga a seguir os avanços que conseguiu na experimentação anterior. Por exemplo, na tarefa *Pavimentações*, o André estabelece a conjectura de que numa pavimentação regular a soma dos ângulos, em cada vértice, é 360° no final da exploração. Mas, foi numa sucessão de experimentações das figuras disponibilizadas no AGD que os conhecimentos vão emergindo, após muitas avaliações:

André: Temos de experimentar todos. Não os podemos sobrepor.

Igor: Vamos dispô-los de qualquer maneira?

André: Experimenta.

Igor: Ahh, dá para virar!

André [referindo-se ao trapézio]: Mas esta não dá pavimentação regular.

A realização de experiências avança, mas agora já com um menor número de polígonos para experimentar. Dedicar-se apenas aos regulares, os identificados na etapa anterior como capazes de responder ao que procura:

André: Já reparaste, o triângulo dá regular. E o quadrado também.

Igor: Regular?

André [de caderno aberto]: Os ângulos e os lados são todos iguais.

Pedro: Como é que vamos registar isto? São polígonos do mesmo tipo.

André: Regular em torno do mesmo vértice.

É de notar que em cada avanço, o André e o seu grupo, estão mais próximos de um determinado resultado. O André tem consciência disso e abandona os casos que não lhe interessam e aproveita as sistematizações dos seus colegas para avançar:

André: Triângulos à volta daquele vértice, sempre triângulos.

Pedro: Experimenta, dá?

André: Dão todos, menos um. O trapézio não dá! Como já se sabia.

Pedro: Espera. Triângulo, Quadrado, e o Pentágono? Não está aqui!

André: Óh Stor? O pentágono é regular?

A exploração continuou depois da minha indicação de que existem pentágonos regulares e irregulares, até que chega ao pentágono regular e verifica que “fica um buraco”, ou seja não dá origem a uma pavimentação regular:

André: Fica um buraco! Quanto é que o ângulo do pentágono?

Pedro: Stor, tem um transferidor?

André: Não é necessário. (...)

Olha, $90^\circ+90^\circ+90^\circ+90^\circ$, $60^\circ \times 6$ e $120^\circ+120^\circ+120^\circ$ para o hexágono! É sempre uma soma de 360° no vértice!

A partir desse momento, na posse da sua conjectura, explorou várias pavimentações com polígonos regulares, sempre do mesmo tipo. Depois passou a juntar triângulos e quadrados. E continuou a investigação com vários tipos de polígonos. No final, no relatório afirma que existem três pavimentações com polígonos regulares: o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono regular.

A conclusão da actividade *Pavimentações* aparece através de um percurso cada vez mais fino. Isto é, ao longo de várias etapas, que vão sendo avaliadas, o André selecciona os casos que pretende investigar a seguir, e assim constrói uma conclusão

acerca da sua investigação. O que permite afirmar que o processo seguido pelo André não é sequencial, nem ziguezague, é um processo caracterizado por sucessivos níveis de aprofundamento.

Na tarefa *Zeros de uma função polinomial*, manteve-se a exploração/avaliação através de uma sucessão de exemplos, que se vão tornando cada vez mais finos até conduzirem a uma conjectura para ser confirmada:

Francisco: 2º grau vá.

André: 2º grau tem 2 zeros?

Tiago A.: E os menos e os mais, temos de ver!

André: Vamos a casos particulares: $Y = X^2 - 5X + 6$

Francisco: É função quadrática e tem 2 zeros.

André: Qual a relação entre os números.

Tiago A.: É isso. Existe uma relação entre os números.

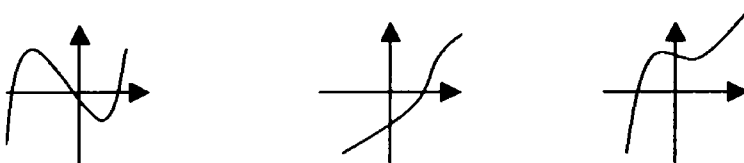
André: É a nossa conjectura. 1 ou 2 zeros consoante a relação entre os números!

Ruben: O professor já nos deu um exemplo que não tem zeros.

Francisco: Quer dizer que tem outra relação. Vamos procurá-las.

A exploração de casos particulares, sugerida pelo André, permitiu ao grupo estudar, naquele momento, apenas as funções que tinham 2 zeros e assim investigar uma relação entre os parâmetros a , b e c , na expressão $Y = aX^2 - bX + c$. Esta avaliação de que os casos com 2 zeros seriam diferentes dos que tinham um zero ou nenhum permitiram um avanço considerável na investigação deste grupo, quando comparado o seu trabalho desenvolvido pelos outros grupos.

Na quarta tarefa, *Uma investigação com funções cúbicas*, o André investiga de uma forma mais tradicional e linear. No processo para desenvolver a sua investigação matemática começa por explorar as sugestões dadas na proposta de investigação: estudo da influência do parâmetro a , estudo de $Y = (X - 2)^3$ e $Y = X^3 - 2$, e finalmente, estabelece as conjecturas e conclusões. Foi na fase final, conjecturas e conclusões, que o André realizou algumas experiências diversificadas para comprovar que a curva da função cúbica obedecia sempre ao mesmo tipo de padrão. Eis os padrões apresentados, onde é visível que os exemplos estudados foram do tipo $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$, com a positivo:



No que diz respeito às dificuldades sentidas pelo André, verificaram-se nas diferentes actividades, assim como os erros. No desenvolvimento da primeira tarefa, senti preocupações acrescidas. Na aula e fora desta, até ao início da aula onde continuaríamos a investigação, pensei diversas vezes: porque é o André seguia a estratégia de incluir os quadriláteros num referencial cartesiano? Depois de reflectir sobre o assunto, percebi que o André tinha associado os pontos médios à mediatriz. A mediatriz tinha sido estudada duas aulas antes da realização da investigação. Usei um referencial para explicar que todos os pontos da mediatriz se encontram a igual distância dos extremos (mediatriz como o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento). E, na ocasião, referi que o ponto médio do segmento de recta pertencia à mediatriz desse segmento e provei que as distâncias eram as mesmas através do teorema de Pitágoras. Este facto veio fazer emergir uma nova dificuldade, para a qual os professores, normalmente não dão muita atenção. O aluno, apesar de não encontrar sentido no que fazia, procurava aplicar os conteúdos que tinham sido leccionados nas aulas anteriores. Para ele, tinha lógica a actividade de investigação estar relacionada com o que tinha sido leccionado nas aulas anteriores. Resolvi questioná-lo sobre o percurso que pretendia seguir. Se o que pretendia era calcular comprimentos ou marcar e unir os pontos médios, classificando o quadrilátero resultante. Depois de levar o aluno a reflectir sobre o seu percurso de investigação, ele abandonou os referenciais depois, também, de questionar uma colega sobre a forma como desenvolvia a investigação. Acerca desta tarefa, o André registou na reflexão escrita o seguinte:

As orientações do professor ajudaram-me a mim e ao meu grupo porque nos davam hipóteses e pistas, embora vagas. Mas, o mais importante e que mais nos ajudou foi o questionar alguns métodos que estávamos a usar, o que nos obrigou a pensar em outros. (Reflexão escrita do André, 12/12/2003)

Para que o aluno ultrapassasse esta dificuldade foi necessário reflectir sobre o efeito que a estratégia dos referenciais lhe estava a causar. O André encontrava-se desmotivado com a passagem do tempo e com a pouca progressão da sua investigação. O que me levou a intervir. Através dos referenciais cartesianos, o André, provou que a união dos pontos médios dos lados de um quadrado dá origem a um novo quadrado. Consegui fazê-lo para o quadrado, porque o subdividiu em triângulos rectângulos e

aplicou o teorema de Pitágoras. No caso, por exemplo do “papagaio de papel” não conseguiu saber que tipo de polígono obtinha, pois não efectuou a subdivisão em triângulos rectângulos.

Noutras situações, também, foi necessário intervir junto do André para que pudesse progredir nas suas investigações. Por sua solicitação, na tarefa *Pavimentações*, enquanto o André investigava se o pentágono pavimentava ou não, a minha intervenção foi apenas no sentido de alertar o aluno para o facto de existirem uns pentágonos regulares e outros irregulares.

Apesar de poder identificar estas duas situações em que o aluno se encontrava com dificuldade em dar continuidade à sua investigação, na generalidade das investigações realizadas as dificuldades do André não se prendiam com conhecimentos matemáticos. Elas situavam-se na definição de um percurso de investigação. Para ultrapassar esta dificuldade, foram importantes as interacções estabelecidas no seio do grupo de trabalho.

No caso da primeira tarefa, as interacções estabelecidas no interior do grupo revelaram-se infrutíferas para ultrapassar as dificuldades sentidas. Mesmo após a verificação de que a estratégia de colocação dos quadriláteros em referenciais cartesianos se mostrava pouco compensadora. Mas, nas outras tarefas, no seio de outros grupos de trabalho, são identificáveis situações em que foram muito importantes as interacções como uma forma de ultrapassar dificuldades:

[*Pavimentações*]

André: Todos os polígonos que aqui estão dão para pavimentar.

Pedro: Nem todos! O trapézio dá?

André: Sim, é difícil, exige muita concentração, mas dá para virar e ver que pavimenta.

Pedro: Mas se virares, nos vértices não tem sempre a mesma forma.

André: Pois é! Não é polígono regular e estamos a estudar pavimentações regulares.

Ou

[*Zeros de uma função polinomial*]

André: Espera, espera, um zero tem X , dois zeros no X^2 e três zeros X^3 .

Francisco: Não, repara: $Y = X^3 + 1$ tem quantos zeros?

O recurso às interacções para ultrapassar dificuldades é geralmente acompanhado por pesquisa no livro ou no caderno diário. As definições e os conteúdos matemáticos são esclarecidos desta forma. Existem situações, quando sente dificuldades na sua investigação, em que o André sente necessidade de reorientar e fá-lo através do livro ou do caderno diário. No episódio seguinte, depois da minha intervenção, o André refere o impacto que teve em si:

[Referindo-se à conjectura que considera que os pentágonos pavimentam] As intervenções do professor que mais me ajudaram a orientar foram, talvez, aquelas em que nós pensávamos que tínhamos chegado a uma conclusão e o professor nos dá um exemplo que quebra a nossa teoria, [o professor afirmou que existem pentágonos regulares e irregulares] demonstrando-nos ou incentivando-nos a verificar qual é a falha. (Reflexão escrita do André, 4/2/2004)

A minha sugestão motivou a pesquisa no caderno diário da definição de polígono regular e a procura de uma relação que permitisse encontrar o ângulo interno do pentágono regular. Como só conseguiu encontrar a definição de polígono regular no caderno e depois da intervenção de uma aluna, a Rita, investigou através dos polidrons a não existência de pavimentações regulares com pentágonos regulares.

Para além de reorientar a sua actividade depois do confronto com dificuldades, existe também a reorientação quando são detectados erros. Na tarefa *Zeros de uma função polinomial*, o André cometeu o erro de admitir que o grau do termo de maior grau de um polinómio corresponde ao número de zeros desse polinómio. Em várias fases da investigação reafirma-o:

André: 2º grau é ... é sempre uma parábola se n é par [referindo-se à expressão $Y = aX^n$] Tem 2 zeros.

Ou

André: É sempre uma parábola, tem sempre 2 zeros. [Refere-se a $Y = aX^2$]

Ou

André: $Y = X^4 - 4X^2 + 3X$, 4 zeros! Tem X^4 .

A minha intervenção, junto do André, durante a investigação dos zeros de um polinómio aconteceu através da indicação de exemplos de funções que não verificavam alguma das “conjecturas” pré-estabelecidas, por exemplo: “ $Y = X^4 + 2X$, graficamente é representada por uma parábola?”.

O André na sua reflexão escrita, acerca da investigação *Zeros de uma função polinomial*, reconheceu que no início da investigação existiu alguma precipitação na exploração sem que tenha havido o cuidado de verificar todos os casos:

Se queríamos saber se uma determinada teoria podia aplicar-se a todos os casos das funções polinomiais (depois de algumas tentativas realizadas por nós para ver se era possível pôr em prática a teoria)
(Reflexão escrita do André, 31/3/2004)

No final existiu um elevado nível de concretização, por parte do seu grupo, e a exploração foi realizada através da investigação das relações entre diferentes parâmetros, dentro de cada grau. O que significa dizer que os erros cometidos, “serviram de lição” e orientaram a investigação no bom sentido.

Uma situação de orientação através dos erros cometidos verificou-se na tarefa *Uma investigação com funções cúbicas*. O André realizou a exploração das sugestões dadas na proposta de investigação, mas não registou as diversas conclusões a que foi chegando. Depois de explorar as sugestões, e na necessidade de generalizar a todas as funções cúbicas as características a que tinha chegado, solicitou a minha intervenção:

André: Oh Stor? Porque é que são crescentes? E quando intersecta o eixo do Y? Onde?

Eu: Pois essa é a questão. Fizeram várias experiências, agora analisem e tirem as conclusões.

Após a observação mais atenta do que tinham realizado, o André verificou que as suas conclusões resultavam da exploração de expressões em que a era sempre positivo. Nos valores atribuídos a esse parâmetro encontrava-se o erro que levava a considerar que uma função cúbica era sempre crescente. A detecção do erro deu origem à orientação da actividade, no sentido de estudar a influência de parâmetros negativos e depois à generalização. Para o André, a minha intervenção foi fundamental na detecção do erro:

O professor ajudou bastante quando precisávamos de ter a certeza que as conclusões poderiam ser aplicadas no geral, ou seja, para todas as funções cúbicas. (Reflexão escrita do André, 27/4/2004)

O André, também, considera que o erro ensina aquando do desenvolvimento de uma investigação. Ao cometer erros, o aluno, experimenta raciocínios com vista a argumentar num determinado sentido. Nessa exploração, apesar de ser errada, porque

não contribui para um maior conhecimento acerca da investigação matemática pretendida, mas proporciona o contacto com outros conhecimentos e permite aprender porque é que determinadas propriedades não funcionam naquela situação – ou seja ensina. O que se comprova pela reflexão do aluno:

Os erros são importantes talvez para excluir diversas possibilidades de solução e para nos mostrar que de uma maneira não dá, naquela situação não se aplica. Portanto, temos de tentar outra e ficamos a saber quando é que podemos aplicar aquela [a errada] propriedade. (Reflexão escrita do André, 4/2/2004)

No que diz respeito aos erros, o André foi evoluindo nas suas concepções. Começa por ter uma concepção da sua exploração como sendo certa ou errada:

Eu pessoalmente acho que os erros serviram para nos ajudar a demonstrar que a maneira como estávamos a pensar estava errada para aquele caso ou para um problema que seja geral. (Reflexão escrita do André, 12/12/2003)

Depois, admite que comete erros. Mas, considera-os naturais na investigação e evidência o papel do grupo de trabalho no confronto de ideias e na execução e melhoria das explorações efectuadas, assim como a identificação dos erros:

Cometo erros. Apresentei teorias [conjecturas] erradas aos meus colegas de trabalho e ao professor, afirmando algumas soluções que no meu ponto de vista estavam certas. Mas depois de as observar com os meus colegas ou com o professor verifiquei que se encontravam incorrectas. (Reflexão escrita do André, 4/2/2004)

Na terceira tarefa, os erros já são vistos como naturais e como fazendo parte do processo de investigação. Mesmo estando a explorar no caminho errado, o André considera que essa exploração tem um papel importante nos esclarecimentos sobre a aplicabilidade de algumas propriedades ou conceitos:

Eu não diria propriamente erros, as teorias que o meu grupo e eu formulamos a meu ver não estavam erradas (não sei explicar bem o que estou a pensar). As nossas teorias tinham ou tentavam seguir ou encontrar uma lógica pensada por nós para formular uma hipótese de resposta. (Reflexão escrita do André, 31/3/2004)

Na última tarefa, já numa atitude reflexiva, denota que perante um desvio na investigação é necessário avaliar e equacionar o caminho seguido de forma a dar ou não continuidade ao percurso definido:

Não lhes chamo erros, foram raciocínios que não explicavam o que nós queríamos que fosse explicado. Em caso de dúvida, chamávamos o professor para rectificar o raciocínio. (Reflexão escrita do André, 27/4/2004)

Auto-avaliação do trabalho

A auto-avaliação do André é baseada nas interacções estabelecidas com os seus colegas ou com o professor. Quando, o André realiza a aferição do seu trabalho com aquilo que os seus colegas realizaram, ele avalia o seu percurso de investigação e redefine um novo percurso ou aprofunda a sua investigação. Esta situação verificou-se na tarefa *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, quando o André questionou a Débora sobre o processo usado para exploração da tarefa (colocação ou não dos quadriláteros em referenciais cartesianos). Mas, também, na tarefa *pavimentações*, o André serviu-se da metodologia usada pelo grupo da Rita para investigar com os polígonos se o pentágono regular originava ou não uma pavimentação regular.

Sendo um aluno que valoriza o trabalho de grupo, o André destaca, precisamente, a avaliação através da discussão e correcção dos respectivos resultados:

Os meus colegas ajudaram bastante porque podem dar opinião e correcção de algum erro que cometemos e claro, também, eles têm as suas ideias o que muitas vezes pode ajudar o grupo a resolver um problema. (Reflexão escrita do André, 12/12/2003)

Ou

As intervenções, por eles feitas, que me ajudaram a orientar a meu ver foram principalmente as suas opiniões (certas ou erradas) e talvez diferentes pontos de vista para a tentativa de solucionar o problema. (Reflexão escrita do André, 4/2/2004)

Ou

Estávamos a fazer o trabalho em grupo e qualquer intervenção por parte de cada elemento foi importante, quer para sabermos o porquê dessa hipótese quer para sabermos se era possível e ver o que levou um elemento do grupo a pensar assim. (Reflexão escrita do André, 27/4/2004)

Nestes excertos, das reflexões escritas do André, destaca-se a visão que tem de avaliação. Como sendo uma actividade interactiva de discussão, confronto de ideias e pontos de vista, em que o principal objectivo é encontrar tentativas de resolução de um problema. Mas, sempre tendo em atenção que é necessário explicar o porquê da tomada de determinada direcção em detrimento de outra. Esta visão de avaliação como comunicação é trazida também para a valorização que o aluno deu às interacções estabelecidas comigo:

[As orientações que o professor me deu foram] importantes para corrigir ideias erradas e para chegarmos a várias teorias (embora não tenha respondido às questões da ficha). No trabalho por nós realizado, explorámos muitas outras coisas. (Reflexão escrita do André, 12/12/2003)

O aluno assume neste excerto a perspectiva que já tinha defendido antes, que a aprendizagem através das investigações matemáticas ultrapassa o que é colocado na proposta. A procura de um caminho para levar “a bom bordo” uma investigação é atrapalhada por erros, dificuldades e desvios, que são aprendizagens se correctamente avaliadas. O André reflecte sobre estes desvios, e foi atribuindo-lhes significado ao longo do ano lectivo, usa-os em seu proveito para avaliar a aplicabilidade ou não de determinados conteúdos ou propriedades nalgumas situação, sem esquecer de justificar os porquês.

Mas, o André também executa a auto-avaliação através do confronto com contra-exemplos, embora não tenha demonstrado ter consciência desse facto. Durante a investigação *Zeros de uma função polinomial*, foram diversas as vezes que solicitou a minha intervenção, ou a dos seus colegas do grupo de trabalho. Quem interagia com André foi chamado no sentido de o confrontar com contra-exemplos de funções que não verificavam as conjecturas que estabelecia:

André: Grau 2 tem sempre 2 zeros!

Eu: $Y = X^2 + 4$, quantos tem?

André: Uma função com 3 zeros tem de ter X^3 !

Francisco: $Y = X^4 - X^2$, não tem!

Estas situações incluem-se na investigação matemática realizada pelo grupo e contribuíram para o reforço de diversas aprendizagem, apesar de o André não ter focado

esses aspectos na sua reflexão escrita. É de salientar que durante as tarefas de investigação, o André demonstrou um maior, e progressivo, cuidado em proferir afirmações sem que tenha existido anteriormente um trabalho de experimentação e reflexão.

Na reflexão escrita sobre o trabalho desenvolvido, o André segue os pontos colocados no guião de orientação para sua redacção. É um denominador comum a todas as reflexões, o facto de o André se referir às suas dificuldades, aos erros cometidos durante a investigação e à questão da generalização. Outro aspecto transversal é que salienta o facto de não ter conseguido atingir os objectivos propostos na tarefa. O André, nas suas palavras, ficou sempre aquém daquilo que lhe foi solicitado. Vejamos o que escreveu sobre a primeira e a quarta tarefas:

O trabalho realizado por mim desde já digo que não foi muito, as minhas ideias não chegaram ao nível suficiente para formular uma hipótese correcta para a solução do problema. Embora não tivesse percebido qual era o problema logo de início, depois de uma breve explicação percebi o que era para fazer, embora não tivesse chegado a nenhuma conclusão lógica. Achei também alta a dificuldade do problema. (Reflexão escrita do André, 12/12/2003)

E

O trabalho realizado foi mau, apenas chegamos a uma ou duas conclusões importantes, que não nos davam a resposta ao problema. Devíamos ter trabalhado mais e pensar também um pouco mais. (Reflexão escrita do André, 27/4/2004)

Este balanço do trabalho desenvolvido é contraditório com o facto, já salientado, sobre a opinião do aluno, de as próprias dificuldades e os erros servirem a aprendizagem. Por exemplo, na segunda tarefa, o aluno encontrou várias conclusões importantes e que não foram registadas no relatório escrito. O mesmo se passou na quarta tarefa. A ausência de registo de conclusões importantes obtidas durante a fase de investigação conduziu a uma auto-avaliação errada na fase de reflexão final. O André submete a sua apreciação e reflexão final ao ter conseguido ou não responder ao problema que serviu de ponto de partida para a investigação. Esta dificuldade de auto-avaliação tem lugar também pelo facto do aluno não distinguir actividade de investigação e resolução de problemas. Por exemplo, a segunda tarefa considera-a um problema fácil:

O problema em questão não era de grande dificuldade, foi um problema – mais ou menos simples. Não exigiu um grande esforço para resolver. (Reflexão escrita do André, 4/2/2004)

Relativamente aos relatórios escritos, o André progrediu ao longo do ano lectivo nos aspectos que foi incluindo e também na qualidade dos documentos produzidos. Na tarefa *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, o André apenas apresenta a seguinte conclusão:

À excepção do quadrado, que tem os ângulos todos rectos e unindo os pontos médios consecutivos forma um quadrado, todos os quadriláteros formam sempre paralelogramos. (Relatório escrito do André, 12/12/2003)

O que dá a conhecer que o André não concebia o relatório como um documento que relata todo o trabalho desenvolvido decorrente da investigação. Não explica como chegou à conclusão: “a partir de um quadrado obtenho outro quadrado”, nem como a provou através do teorema de Pitágoras, nem as dificuldades sentidas, nem o abandono dos referenciais cartesianos. Ou seja, apresenta um relatório sobre o trabalho desenvolvido muito incompleto.

Na elaboração do segundo relatório, para a actividade desenvolvida em *Pavimentações*, o André melhorou os aspectos a incluir e também a forma como são apresentados. Para além de referir a justificação que o leva a incluir o quadrado, o hexágono regular e o triângulo equilátero como polígonos que originam pavimentações regulares, inclui três figuras como exemplos de pavimentação regular. Não se refere à exploração que efectuou para o caso do pentágono, nem apresenta outras pavimentações originadas pela junção de vários polígonos regulares, que sei terem sido estudadas. No entanto, o André refere a necessidade de que para pavimentarem, a soma dos ângulos dos diferentes polígonos, num vértice, ter de ser 360° :

Podem existir outras pavimentações desde que a soma dos ângulos que concorrem ao mesmo vértice seja de 360° . (Relatório escrito do André, 4/2/2004)

Na terceira tarefa, o grupo onde o André estava integrado estabeleceu umas interacções muito fortes. Isto é, os alunos empenharam-se em investigar profundamente a questão colocada e discutiram as diferentes etapas dessa investigação efusivamente. O relatório do André nesta tarefa volta a não incluir os erros e as dificuldades sentidas,

mas inclui três expressões do primeiro grau, acompanhadas dos respectivos gráficos e com a conclusão que generaliza a questão de uma função ter apenas e sempre um zero. Para o 2º grau, são incluídos exemplos de funções com dois, um ou nenhum zero, também acompanhadas dos respectivos gráficos. Para o 3º grau, repete-se a inclusão de exemplos com 1, 2 ou 3 zeros. Não é discutido o facto de não ter conseguido encontrar uma função de terceiro grau sem zeros. Experimenta dois exemplos para o quarto grau e generaliza a questão de no máximo existirem n zeros quando o termo de maior grau de uma função polinomial é n . Existem sinais no relatório de que foi tentada a exploração de uma relação entre os diferentes parâmetros nas expressões de 2º grau de forma a poder estabelecer uma generalização para a existência de um, dois ou nenhum zero.

Os aspectos incluídos no relatório do André, para a quarta tarefa, são os seguintes: gráficos de $Y = X^3$, $Y = -X^3$, $Y = (X - 2)^3$, $Y = X^3 + 2$ e o respectivo estudo das características gerais sugeridos na proposta de trabalho. Depois, apresenta três expressões e respectivos gráficos que procuram mostrar a influência do parâmetro d , na intersecção do gráfico da função com o eixo OY . O André apresenta, ainda, a conclusão de que a representação gráfica não corresponde a uma função cúbica, embora os padrões de gráficos apresentados pelo André, como sendo os possíveis na função cúbica, estejam incompletos. É de salientar que também é apresentada a conclusão relativa à influência do parâmetro d na intersecção com o eixo OY . O seguinte quadro mostra a evolução verificada nos relatórios escritos do André:

Quadro 4: Características incluídas nos relatórios escritos do André.

Primeira tarefa	Não apresenta o processo, nem os erros ou dificuldades; Apresenta uma conclusão.
Segunda tarefa	Não apresenta o processo, nem os erros ou dificuldades; Apresenta figuras e uma conclusão para as pavimentações regulares e uma generalização.
Terceira tarefa	Não apresenta os erros e as dificuldades; O Processo percebe-se através da apresentação dos resultados; Apresenta diversas funções acompanhadas das respectivas representações gráficas e conclusões. Apresenta uma generalização.
Quarta tarefa	Não apresenta os erros e as dificuldades; O Processo percebe-se através da apresentação dos resultados; Apresenta diversas funções acompanhadas das respectivas representações gráficas e conclusões. Responde à questão inicial.

Síntese do capítulo

O André é um aluno que vive a escola com naturalidade e sem se mostrar afectado pelas pressões causadas pela avaliação externa ao processo de ensino e aprendizagem. Este facto foi-me dado a perceber porque na entrevista não manifestou as suas pretensões de prosseguimento de estudos para o ensino superior. Esta despreocupação traz-lhe algumas vantagens na forma como vive o processo de ensino e aprendizagem. Não se sente pressionado pela necessidade de obter resultados em exames. Este aspecto reflecte-se, mais directamente, na avaliação. A sua aparente despreocupação relativamente à imagem que cria no professor permite-lhe questionar o trabalho realizado, esclarecer dúvidas, mostrar as suas dificuldades e os erros cometidos.

Embora seja um aluno muito comunicativo, mostrou algumas dificuldades ao nível da interpretação das tarefas e na definição de um percurso de investigação. A interpretação é feita através de avanços e recuos ao nível da leitura das propostas de investigação. Procura obter o esclarecimento do significado de alguns conceitos através da tradução da proposta por outras palavras ou da procura no caderno de indicações que servem de ancoragem. O André define o seu percurso de investigação num processo de sucessivas explorações e avaliações, com a ajuda de algumas interacções. Os resultados surgem e os conhecimentos ganham significado. Mas nem sempre este processo é bem sucedido. Na primeira tarefa a interpretação resultou na escolha de um percurso ao qual não conseguiu dar continuidade.

As dificuldades de interpretação, e consequentemente de escolha e concretização de um percurso de investigação, nalgumas situações causaram o bloqueio da investigação, o que só foi possível ultrapassar depois da minha intervenção ou das diversas interacções estabelecidas com o seu grupo de trabalho (Abrecht, 1991; César, 1997), sendo que, nalgumas situações, a continuação da investigação esteve dependente das intervenções referidas (Perrenoud, 1999). O André mostrou estar consciente da importância que o grupo de trabalho tem no prosseguimento do trabalho investigativo, e depois de ultrapassar as suas dificuldades interpretativas, este aluno desenvolve a investigação sem se mostrar perturbado pelo surgimento destes contratempos (Davis & Mason, 1989).

Na actividade investigativa, o André organiza o seu trabalho de forma diferenciada, em consonância com a proposta que lhe é colocada, o que significa que o

aluno realiza as diferentes investigações matemáticas usando processos distintos. Embora o faça de uma forma não linear (Brocardo, 2002), isto é, não usa o processo habitual de conjectura, experiência e generalização, a sua exploração é dominada pela realização de muitas experiências, quer na fase inicial de exploração, quer na fase final de confirmação.

O percurso de investigação é uma sucessão de experiências, onde em cada avanço conseguido é tida em conta a conclusão anterior (Hadji, 1994; Tunstall & Gipps, 1996). Assim, ganha significado acrescido cada etapa ultrapassada na investigação. Os processos investigativos, que o André usa, estão dependentes da auto-avaliação dos resultados obtidos, que num processo linear de investigação seriam as conjecturas que viriam a ser ou não confirmadas pela experiência. Para o André, as conjecturas surgem no final de um percurso de experimentação. Depois de se referir a elas como sendo conclusões, reconfirma-as através da testagem de alguns exemplos e procura generalizá-las (Serrazina, 1995).

A exploração é feita através da experimentação perspicaz e não aleatória de casos particulares, que são avaliados e é sobre eles que o André constrói as etapas para a exploração seguinte. Os casos particulares a explorar são criados por intuição ou por associação com as actividades que foram desenvolvidas noutras aulas. Este processo de exploração obriga a que o aluno esteja constantemente a reorientar (Allal, 1986) o seu trabalho numa nova direcção. Nestes sucessivos níveis de aprofundamento, verificam-se muitas solicitações da minha intervenção e da dos alunos que com ele interagem.

O André, quando enfrenta dificuldades ou erros, assume-os como uma orientação para o caminho correcto e modifica o sentido da sua exploração para poder continuar. Esta prática, também, é coerente com a concepção que o aluno tem de que o erro ensina e “deve servir de lição” (Hadji, 1994; Pinto 2003). No entanto, verificou-se uma evolução quanto à atribuição diferenciada de classificação dos erros ao longo deste estudo. Os erros passaram a ser positivamente valorizados à medida que o ano lectivo foi decorrendo. Pode mesmo dizer-se que de uma ideia de castigo, o André evoluiu para uma concepção de erro como contexto de aprendizagem.

A auto-avaliação desenvolvida pelo André, durante as investigações matemáticas, tem o papel de aferir o trabalho realizado até um dado momento. Este mecanismo desenvolve-se por comparação com os outros alunos através da discussão e correcção, quando de tal sente necessidade (Perrenoud, 1999; Shepard, 2001). Este pressuposto avaliativo é concebido através da comunicação, de forma interactiva e

conduz à reflexão sobre o trabalho desenvolvido e à definição de percursos futuros (Bain, 1988). O André ao ser confrontado com contra-exemplos, apresentados por outros, que também lhe possibilita a aplicação do mecanismo da auto-avaliação (Perrenoud, 1999; Jorro, 2000; Vial, 2001), reorienta o seu trabalho.

Nas reflexões escritas, o André salienta os erros, as dificuldades e a sua necessidade de responder à questão inicial como uma forma de generalização. Acerca dos erros, evidência uma notória progressão no sentido da inclusão dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, é de referir que o aluno mostrou alguma dificuldade em se avaliar através da forma escrita.

O relatório escrito, para o André, é um documento pouco valorizado e onde inclui poucos aspectos relativos ao seu percurso de investigação. Embora denote uma evolução positiva nos aspectos que inclui, fruto do feedback que lhe foi dado durante o ano lectivo, raramente se refere às interações ou aos aspectos menos conseguidos na sua investigação.

CAPÍTULO VI O LOURENÇO

Apresentação

O Lourenço é um aluno de estatura média, olhos claros e cabelo curto castanho, normalmente com gel. É um apaixonado pelo futebol, afirmando-se junto dos outros como futebolista, pelo que geralmente veste roupas de marcas associadas ao desporto. Com quinze anos, no início do ano lectivo, é um aluno bastante comunicativo e participativo nas actividades desenvolvidas na sala de aula. Tem expectativas de prosseguimento de estudos para o ensino superior e mostra-se sempre muito atento e envolvido. Nas aulas, segue com atenção as minhas explicações e interrompe de forma oportuna, colocando questões pertinentes para esclarecer as suas dúvidas. Mantém a mesma atitude quando as apresentações ou as dúvidas vêm dos seus colegas. Nas actividades de investigação mostra ter capacidade de reflexão desenvolvida, para poder questionar e repensar o seu trabalho. É um aluno crítico em relação à sua aprendizagem e reconhece o valor educativo das tarefas de investigação no seu percurso escolar, demonstrando também uma atitude positiva face à pesquisa e à investigação matemática. Ao nível do 2º e 3º ciclos, as suas classificações situam-se nos níveis quatro e cinco.

Na escola, e também no trabalho de casa, gosta de actividades desafiantes, que necessitem de raciocínios mais elaborados. Explora-as com empenho e procura responder às questões colocadas mesmo quando as tarefas têm um grau de dificuldade superior ao normal.

Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem

Para o Lourenço, a Matemática é “a ciência que trabalha com números”, com as medições e as contas, funcionando como uma forma de ter ideias precisas dos valores, das medidas em valores exactos. Quando confrontado com a necessidade de indicar uma situação da vida real em que a Matemática lhe pudesse ser útil, no momento, não se lembrou. No entanto, manifestou gostar bastante da disciplina porque trata de números e porque sempre se deu bem com ela. Associa a investigação matemática à descoberta platónica: “de certa forma é descobrir o que outros já descobriram”.

As actividades de investigação foram consideradas como um processo interessante, mas difícil para chegar a conclusões sobre determinada tarefa:

O Processo que se leva, eu penso que seja bom para chegar à conclusão de uma tarefa. No início, acho que começar do zero é um bocadinho difícil, com ajuda, vai-se lá. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

O trabalho cooperativo é visto pelo Lourenço como um aspecto particularmente facilitador para o desenvolvimento da investigação matemática:

É importante ter duas cabeças a fazer, é melhor do que uma. Estar ali a pensar a dois facilita mais pois, porque estamos os dois a pensar e como há várias fórmulas [formas] de chegar [ao resultado], tanto pode [chegar] um como o outro. Vamo-nos ajudando. Se eu estou a pensar numa e ela diz qualquer coisa, se calhar chegamos lá por mero acaso. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Na entrevista, o Lourenço referiu que quando sente dificuldades a Matemática recorre à pesquisa no livro, no caderno diário do ano ou de anos anteriores e à Internet. Usa a estratégia de pesquisar nestes recursos com o objectivo de acompanhar e apreender as matérias abordadas no trabalho desenvolvido, nas aulas, durante o período lectivo:

Pedir ajuda, pesquisar no livro, no caderno, nos cadernos dos anos anteriores, Internet, perguntar a colegas na net. A gente pergunta a colegas ou a pessoas desconhecidas. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Os exercícios de repetição sistemática do mesmo raciocínio são, em sua opinião, importantes para ajudar alguns alunos a superar dificuldades. Mas, considera ser também necessário diversificar e tentar encontrar exercícios [problemas] de tipos diferentes, que possam permitir o desenvolvimento de outros raciocínios para poder obter uma melhor classificação no teste de avaliação:

Há a quem ajude esses exercícios. Há pessoas a quem não ajuda. Mas há pessoas a quem ajuda, mas melhor seria mais ou menos como sai no teste, depois, valorizava o teste. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

No que diz respeito à avaliação, considerou que é necessário que os professores atribuam uma maior importância ao trabalho na aula, ao empenho e à participação. Perante a questão de como é obtida a classificação no final de um período lectivo, o

Lourenço não teve dúvidas ao afirmar que “acho mal” e teceu várias críticas que dizem respeito aos testes escritos:

Alguns são muito diferentes das aulas. Acho mal, eu não sabia fazer os exercícios! Os exercícios são diferentes e nós estamos habituados a trabalhar com outros, ou já trabalhámos com outros, e conhecemos os outros e depois chegamos [ao teste] e deparamo-nos com estes diferentes. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Esta preocupação foi manifestada porque, no seu entender, o mais valorizado na classificação do final do período são os testes escritos, o que para si traduz a mentalidade de “se não souber fazer nos testes também não saberei fazer no futuro?”. Para o Lourenço é necessário avaliar para distinguir os alunos, mas os testes são uma forma de o fazer, entre outras. Afirmou, mesmo, que os professores nas aulas valorizam tudo, mas de uma forma global. Reconheceu assim uma forma holística de conceber a avaliação:

É tudo e global. Testes e trabalho na aula. Valorizam o trabalho e desvalorizam o não trabalho. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Relativamente à avaliação formativa, o Lourenço não gosta de a realizar porque, como afirma, “destrói-me a cabeça toda se eu chego a um [conteúdo] que não sei, se encontro um que não sei!”. O aluno mostrou conhecer o conceito de avaliação formativa, com uma associação forte à regulação das aprendizagens, no sentido de adquirir as que ainda não atingiu. Das suas palavras fica claro que o aluno realiza a sua própria auto-avaliação:

[Nos exercícios] quando não conseguir fazer um, vou fazer outro e, talvez volte atrás para fazer outra vez, para tentar aperfeiçoar. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Para consolidar o seu trabalho na disciplina, o Lourenço falou numa folha à parte onde regista todos os procedimentos necessários para atingir os seus objectivos ao nível das competências matemáticas. Questionado sobre o tipo de procedimentos existentes na folha acrescentou:

Todos. Há regras, aquelas, escrevo as regras. Há aqueles procedimentos com os erros possíveis que eu posso cometer, que eu sei que eu cometo muitas vezes, que vou ter de tirar isto e pôr aquilo, ou que não posso usar decimais. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Referiu, ainda, que na folha de apoio regista todos os exercícios diferentes que encontra com o objectivo de “tentar saber tudo”. Como afirmou, é uma forma de aprender Matemática. Tenta encontrar tipos de exercícios diferentes, que podem estar relacionados com os conteúdos ou não, que podem ser meros exercícios de repetição do mesmo raciocínio ou outros que ele designou como “exercícios à parte”. A folha do Lourenço é um registo de chamadas de atenção para determinadas técnicas, capacidades desenvolvidas e alertas sobre assuntos que é necessário aprofundar.

Na sua visão do processo de ensino e aprendizagem, o Lourenço enquadra o erro na actividade humana. Considera o erro como uma oportunidade de descobrir o que se pode aprender ou aperfeiçoar. O facto de cometer erros, considera-o como uma ajuda para depois estar com mais atenção, “não os repetir” e como uma obrigatoriedade de voltar atrás, rever tudo, “usar pente fino até descobrir o erro”.

Sendo um aluno que se encontra a frequentar o 10º ano pela primeira vez, o Lourenço considera que a sua adaptação ao ensino secundário foi muito má. Apresentou vários motivos para o justificar, alguns deles exteriores à própria escola:

... tenho um horário muito difícil, depois tenho futebol depois ainda, tenho mais duas explicações de duas horas semanais cada, mais os trabalhos que nos são dados no secundário, fico com menos tempo ainda para estudar para o teste. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Quanto à Matemática, considerou fácil a sua adaptação. No ano anterior era sempre a mesma coisa: “ [o professor] escrevia ou dava o exercício, a gente fazia, ajudava-nos, tirava-nos dúvidas”. Agora, do ponto de vista do Lourenço, “a matéria é outra, o que é normal”. No entanto, ele refere-se às tarefas propostas e não aos conteúdos pois, de imediato, acrescentou que no 9º ano a prioridade ia para os exercícios e o cumprimento do programa [no sentido da abordagem de uma lista de temas]:

Tarefas de investigação, não fizeram muitas, era mais exercícios! Queria [o Professor] dar a matéria, queria cumprir o programa e então dava a matéria toda! As equações e os sistemas. (Entrevista ao Lourenço, 2/12/2003)

Actividade de investigação e avaliação

Interpretação da tarefa

Uma boa interpretação da tarefa e o correcto entendimento do que é solicitado é o ponto de partida para uma concretização bem sucedida. Este é o lema do Lourenço. Recorre a dois processos para interpretar a tarefa: a ancoragem da nova proposta nos conhecimentos adquiridos anteriormente e a realização de algumas experiências iniciais.

O primeiro impacto do Lourenço com as tarefas propostas foi marcado pelas semelhanças que ele tenta identificar entre a nova proposta e o que tinha sido realizado noutras actividades. Por exemplo, na primeira tarefa, depois de realizar sucessivas leituras da proposta de investigação, exclamou para os outros alunos que com ele interagiram: “Isto não foi aquilo que fizemos na outra aula: ângulos iguais e lados iguais?”. Também na tarefa *Uma investigação com funções cúbicas*, o Lourenço referiu para o aluno com quem trabalhou: “Quadrática não pode ser. Olha, isto é uma função quadrática. É uma parábola”. E salientou a semelhança entre a proposta de investigação e o trabalho que tinham realizado nas férias para o caso da função quadrática: “Cúbica? Poderá ser. Uma quadrática não é, as quadráticas fazem assim, o trabalho de férias foi sobre as funções quadráticas”. Nas outras duas tarefas, *Pavimentações* e *Zeros de uma função polinomial*, também é possível encontrar evidência da importância que tinha para ele a ligação entre a proposta de uma nova investigação e os conhecimentos adquiridos em experiências de aprendizagem já vividas:

A partir daí compreendi a investigação pois já sabia que o vértice teria que ter o resultado de 360° , como soma de todos os ângulos dos polígonos que se encontram nele. (Reflexão escrita do Lourenço, 4/2/2004)

E

Do primeiro grau, só podem ser rectas, quadrática tem X^2 e cúbica tem X^3 . X é uma recta. (Gravação áudio, 31/3/2004)

Na terceira tarefa, talvez como resultado do trabalho continuado com actividades de investigação, o aluno referiu a importância da realização de algumas experiências iniciais com equações suas conhecidas, como forma de iniciar o trabalho:

Após praticarmos algumas experiências com as equações, com o devido grau, observámos, que consoante a sua forma era fácil descobrir quantos zeros a função poderia ter. (Reflexão escrita do Lourenço, 31/3/2004)

As experiências realizadas estiveram relacionadas com a função afim, que tinha sido explorada anteriormente. Experimentou as seguintes expressões: $Y=4X$, $Y=15X-9$ e $Y=\frac{32}{3}X-2$.

Ainda na tarefa e a propósito do número de zeros de uma função cúbica, o aluno comentou o facto da proposta ter pouco texto, o que realça o destaque dado ao enunciado. A forma como a tarefa é proposta, em suporte escrito, com ou sem sugestões, desencadeia dois tipos de reacção no Lourenço: a busca de orientações no enunciado que explicitem o que tem a realizar ou a solicitação, junto dos outros alunos ou do professor, da clarificação da actividade a desenvolver.

Um episódio que reforça a importância dada ao enunciado passou-se na apresentação e discussão das conclusões na terceira tarefa. Quando um dos grupos apresentou o facto de uma função de grau ímpar ter sempre um zero, o Lourenço não ficou muito satisfeito e mostrou desagrado por aquele grupo ter encontrado conclusões que o seu grupo não encontrou. Ao avaliar o trabalho realizado na actividade, afirmou que as várias conclusões deveriam ter sido definidas no enunciado como objectivos a atingir:

Como objectivo final, digo que acho um objectivo demasiado profundo para não estar descrito no enunciado. Portanto, esse objectivo, devia constar no enunciado (opinião). (Reflexão escrita do Lourenço, 31/3/2004)

Ao nível da interpretação destaco ainda a importância dada à existência de sugestões na proposta de trabalho, quer para o ajudarem a estabelecer um caminho de desenvolvimento da investigação, quer para lhe dar à partida uma base para realizar algumas experiências iniciais, com o objectivo de permitir uma primeira avaliação do que tem para desenvolver:

O Lourenço, após uma leitura atenta das sugestões dadas, rematou: “quadrática não pode ser!” Depois, estudou as sugestões: os zeros, o domínio, o contradomínio, os extremos, o sinal e a continuidade. (Diário de bordo, 27/4/2004)

Para além do Lourenço ter questionado as conclusões dos colegas face à proposta aberta que tinha sido colocada para investigação na terceira tarefa, noutra tarefa, em *Uma investigação com funções cúbicas*, ele elogia o facto de existirem sugestões como forma de orientar o caminho a seguir: “o Professor ajudou ao indicar, inicialmente, quais os pontos que nós devíamos pesquisar” (Reflexão escrita do Lourenço, 27/4/2004).

Existem outras evidências da importância que o aluno dá ao enunciado da proposta. Por exemplo, o Lourenço salienta as implicações que o professor tem sobre a proposta ao incluir ou não sugestões de trabalho e na forma de as apresentar, e também refere a inclusão ou não de figuras ou exemplos. O que, na sua opinião, contribui para a construção de um plano de desenvolvimento da actividade de investigação a realizar.

Também a interpretação inicial da tarefa é considerada a primeira dificuldade que pode impedir o sucesso e o progresso da investigação:

Depois de conseguir ultrapassar a determinação do objectivo inicial, se tivermos a ajuda do professor seguimos o trabalho com pouca dificuldade: fórmulas e desenhos. (Reflexão escrita do Lourenço, 12/12/2003)

Na tarefa *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, perante a dificuldade de interpretação, a estratégia que seguiu para a ultrapassar, passou por traduzir os conceitos que eram referidos no texto da proposta para uma linguagem diferente, que no seu entendimento, mais perceptível para o grupo. Por exemplo, nesta transformação linguística, o aluno referiu várias propriedades que dão consistência matemática à identificação dos pontos médios, em cada um dos lados: (1) o ponto médio ocupa a mesma posição em todos os lados; (2) é equidistante dos dois vértices que suportam o respectivo lado; e (3) é o ponto de simetria dos vértices que são extremos do lado que o contém. Veja-se o que o Lourenço registou no relatório:

Pontos médios de lados consecutivos quer dizer nos lados são idênticos, quer dizer que neste lado é igual a neste, ponto médio pode ser simétrico, são as palavras que nós damos às coisas.

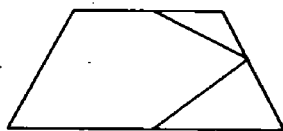


Figura do relatório do Lourenço, 12/12/2003

Igualmente na tarefa *Uma investigação com funções cúbicas*, o aluno transforma as características gerais das funções na sua própria linguagem, por exemplo: “Intervalos de monotonia: crescente e decrescente” e “Positiva e negativa é o estudo do sinal”.

A existência de orientações claras acerca daquilo que é necessário desenvolver na actividade de investigação permite, à partida, estabelecer a ancoragem com conhecimentos adquiridos ou a realização de experiências iniciais. Estes dois processos de interpretação, para o Lourenço, também podem ser obtidos de uma outra forma, não têm obrigatoriamente de ser dadas na forma escrita. Os processos de arranque poderão advir das interações estabelecidas com o professor, os outros alunos ou qualquer outro recurso. Daí que o ultrapassar da dificuldade de interpretação se faça muitas vezes usando um processo de tradução linguística ou matemática.

Desenvolvimento da tarefa

Ao nível do desenvolvimento das investigações matemáticas, o Lourenço foi sempre muito organizado na exploração e apresentação das primeiras conclusões, apesar de não seguir um processo linear. Na primeira tarefa, explorou o “papagaio de papel”, dois trapézios e dois quadriláteros de forma sequencial, registando de imediato as conclusões. Na segunda tarefa, apresenta as explorações efectuadas com os polígonos que estavam disponíveis no AGD. Na tarefa *Zeros de uma função polinomial* a metodologia passou por explorar sucessivamente o 1º grau, o 2º grau e o 3º grau, apresentando rigorosamente os gráficos. A importância dada ao rigor de apresentação é identificável pela afirmação que proferiu durante a realização da actividade de investigação: “Quando fazem graficamente escrevam os zeros, as do 2º grau podem não ter zeros, as do 1º têm sempre um”. E por último, na investigação com funções cúbicas, segue as sugestões dadas para exploração, ao mesmo tempo que vai apresentando algumas conclusões emergentes da exploração.

Nas diferentes etapas de exploração da tarefa não se identifica que o Lourenço formule conjecturas, embora durante a concretização da sua actividade vá testando, melhorando e argumentando a favor da sua intuição. A exploração encaminha-se de forma a sistematizar as suas conclusões: “É um rectângulo, ainda tens dúvidas que é um rectângulo? Procura um que não dê?” ou “Do 1º grau que tenha 2 zeros: $Y=0X$ é do 1º grau?”.

Um dos métodos utilizado pelo Lourenço, quando não se encontra seguro de que detém uma conclusão generalizável, é a busca de contra-exemplos que refutem a sua conjectura:

Por acaso, se eu fizer assim, vê-lá é um rectângulo! Vou tentar descobrir um que não dá. Pois... Não é um rectângulo, senão este ponto teria de ser mais acima.

Na quarta tarefa, o aluno usou outro método. Procurou numa aluna, que não pertencia ao seu grupo de trabalho mas em relação à qual tem uma relação de confiança, a confirmação das suas conclusões. A dada altura, o aluno afirma “Vamos comparar? Encontrei quatro conjecturas e vocês? São os desenhos que pude efectuar”. Mas, a realidade é que ele faz esta afirmação depois de ter concluído a sua investigação, ou seja, ele não tem conjecturas. São uma espécie de conclusões, às quais ainda não atribuiu significado e procura na interacção com a colega o reforço que lhe falta:

Catarina: Vamos ver.

Lourenço: Sabem o que são conjecturas?

Catarina: Diz.

Lourenço: São os desenhos que pudemos efectuar. As conjecturas podem ser sempre iguais, mas não são, algumas fazem tipo um “ésse” e depois volta a crescer, decrescem e depois volta a crescer.

Catarina: Como se chama a curva?

Lourenço: Não sei, mas é característica das funções cúbicas!

O Lourenço continuou a explicação à sua colega, inclusive explica-lhe como verificar o número de zeros. Mas, o curioso da situação é que ele explica como se já soubesse, como se já tivesse a certeza do que afirma, o que não é bem assim. Ele está a explorar enquanto lhe explica:

Catarina: Há sempre um zero?

Lourenço: Ainda não encontrei com dois, mas há!

Catarina: Tem de haver?

Lourenço: Faz assim, olha, dois zeros.

Catarina: E com três?

Lourenço: Vamos ver!

Todo este processo de investigação do Lourenço é caracterizado pela não linearidade, isto é, ele ao chegar a uma conclusão não a valida definitivamente. As suas conclusões são temporárias. Poderiam ser consideradas como conjecturas, as quais vão,

ou não, ser confirmadas ao longo da investigação. Vejamos o que sucedeu na actividade *Pavimentações*: “O triângulo e o quadrado podem ser. São só estes!” Mais tarde, volta ao assunto: “O trapézio não! Com o quadrado dá? E o pentágono?”. Na terceira tarefa, explorou e concluiu acerca do número de zeros de uma função de 1º grau e depois de concluir acerca do número de zeros de uma função de 2º grau, volta a colocar a questão: “as do 1º grau têm sempre um zero?”.

Alguns alunos, perante as primeiras dificuldades, não hesitavam em solicitar a minha intervenção, quer para lhes traduzir a questão por outras palavras, quer para lhes dar pistas para investigação, ou até obter feedback acerca dos avanços conseguidos. Mas, o Lourenço denota um especial prazer em conseguir ultrapassar as suas dificuldades sem a minha intervenção ou sem as intervenções dos seus colegas.

Na exploração da actividade, nos momentos em que lhe surgiram dificuldades, ele procurou ultrapassá-las recorrendo à consulta do livro adoptado (primeira tarefa), à execução de mais experimentações (segunda tarefa) e à exploração de outros gráficos de funções, com a calculadora gráfica (terceira e quarta tarefa). Perante o dilema de decidir que tipo de polígono se obtém ao unir os pontos médios de um quadrilátero, o aluno decidiu recorrer ao livro: “Sinceramente, ...não temos conhecimentos para fazer isto, vamos ao livro!”. Nas *Pavimentações*, o apelo à experimentação evidenciou-se: “Temos que experimentar todos os polígonos. Experimenta. Mete lá o quadrado, dá? Continua”. O mesmo se passou na terceira e quarta tarefa, mas desta vez com gráficos. Na terceira:

Lourenço: Quando fazem graficamente escrevam os zeros.

Catarina: 1º grau é X e 2º grau é X^2 ?

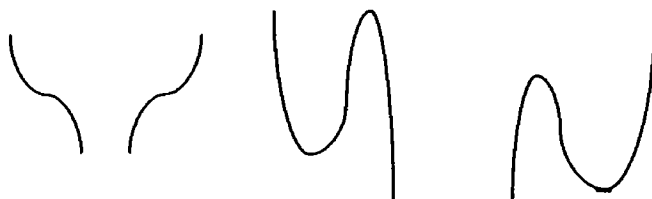
Lourenço: Experimenta. Tenta arranjar uma do 1º grau com 2 zeros?

Ou, na quarta tarefa:

A função pedida é do tipo



Logo, não pode ser, porque as funções cúbicas que experimentei só podem ter as seguintes representações:



O Lourenço tem a noção que para ultrapassar as suas dificuldades prefere esgotar os meios individuais em vez de o fazer através das interações pessoais com os outros actores do processo de ensino e aprendizagem: “Como poderia haver objectivos diferentes, as orientações individuais foram as mais aproveitadas” (Reflexão escrita do Lourenço, 12/12/2003); e “apesar de ter sido um trabalho de grupo, não foi preciso a ajuda dos colegas para tirar as minhas conclusões, portanto realizei o trabalho um bocado à parte” (Reflexão escrita do Lourenço, 4/2/2004). A esta justificação acrescentou a influência negativa que os outros lhe poderão causar, quer por lhe darem pistas erradas, quer por quebrarem o ritmo de investigação:

Por exemplo: o Tiago A. ter dito que todos os quadriláteros unindo pontos médios formam paralelogramos excepto um, influenciou-me... (Reflexão escrita do Lourenço, 12/12/2003)

Notei que [os colegas] ainda estavam um pouco atrasados, em relação ao meu trabalho, apesar das conjecturas serem parecidas. (Reflexão escrita do Lourenço, 27/4/2004)

Não foram muitas as vezes em que me chamou para colocar questões. Na primeira tarefa as solicitações estavam muito relacionadas com as características que definem os quadriláteros. Na segunda tarefa, também, a preocupação eram definições matemáticas, mas desta vez relacionadas com as definições de polígono regular e pavimentação regular. Ao longo do desenvolvimento das quatro tarefas, existiram momentos em que o aluno mostrava preocupação em responder à questão inicial colocada para investigação: “Professor, temos que responder a estas questões?”. Na minha opinião, o Lourenço estava à procura de um caminho de orientação para continuar a sua actividade de investigação. A minha resposta foi no sentido de lhe explicar que as questões colocadas para investigação são globais e no seu trabalho investigativo teria de percorrer várias etapas, várias sub-questões para atingir o objectivo proposto. Na terceira e quarta tarefa, voltaram-se a repetir as questões relacionadas com os enunciados: “Stor, temos que representar graficamente?”.

Na realização da sua investigação, o Lourenço não dá destaque aos erros. Não os escreve no relatório e também não se refere aos mesmos nas poucas interações que estabelece com os seus colegas. Para ele, o erro faz parte da exploração. Não comete muitos e como refere: “erros não cometi, penso que não seja um trabalho onde isso possa existir muito” (Reflexão escrita do Lourenço, 31/3/2004). Esta desvalorização do erro prende-se com a interpretação que o Lourenço lhe dá. Considera-o como parte integrante do processo investigativo, daí que não o valorize enquanto erro, mas dá-lhe importância como impulsionador da definição de novos caminhos de investigação:

Quando descobri que o pentágono não pavimentava fiquei atrapalhado, porque pensava que todos os regulares pavimentavam. Andei à procura de outros que não pavimentassem. O resultado foi que quando se juntam a soma no vértice não dá 360° . (Reflexão escrita do Lourenço, 4/2/2004)

Os erros existem e estão relacionados com o não conhecimento de algumas definições, ou uma propriedade ou terminologia: “Estamos a falar de quadriláteros, não é um rectângulo” e “ $Y=0X+5$ é uma recta horizontal e é do primeiro grau?”. Outros dizem respeito ao reconhecimento daquilo que é solicitado por mim na tarefa de investigação: “é necessário fazer a monotonia e isso tudo? Estudar tudo! É isso que significa fazer o estudo completo” (na quarta tarefa), ou “Stor, temos de representar graficamente? E escrever os zeros?” (terceira tarefa). Estes factos provocaram alguma atrapalhão no desenvolvimento da actividade de investigação. O aluno solicitou a minha intervenção para o esclarecer acerca da apresentação gráfica e indicação do número de zeros na terceira tarefa. Ao me colocar uma questão sobre os aspectos de apresentação e justificação das conclusões, o aluno orientou o seu trabalho no sentido de o concretizar dentro dos parâmetros por mim valorizados. Já na quarta tarefa, ultrapassou a dificuldade recorrendo ao caderno diário, fazendo a analogia com outras actividades que tinha realizado anteriormente. Relativamente a não considerar o rectângulo como sendo um quadrilátero, nem como sendo um caso particular de paralelogramo, na primeira tarefa desviou-o da exploração das relações geométricas entre as duas figuras passando a explorar comprimentos aproximados. Segundo o aluno, a opção pelo cálculo dos comprimentos resultou da facilidade de aplicação do teorema de Pitágoras.

Auto-avaliação do trabalho

O Lourenço é um aluno que aprecia o trabalho que realiza nas tarefas de investigação. Detentor de um espírito crítico desenvolvido, executa a avaliação durante todo o processo de investigação. Aplicando-a no ziguezaguear da exploração, nas experimentações e conhecimentos que utiliza, nos mecanismos que desenvolve para ultrapassar dificuldades e na procura de interações ou de ancoragens com trabalhos já realizados. Para o Lourenço, a exploração da tarefa é um momento de aprendizagem que não passa por procurar uma solução única, mas por um questionar sistemático dos sucessivos resultados e do confronto com os saberes e as capacidades que possui. Assim, auto-avalia a sua investigação usando o confronto com os conhecimentos adquiridos para validar as suas conclusões, procurando encontrar contra-exemplos que refutem as suas conjecturas e estabelecendo interações com o professor ou com os outros alunos com o objectivo de esclarecimento de definições matemáticas ou de apoio e confirmação dos seus resultados.

Na primeira tarefa, o aluno questionou o facto de obter um trapézio ao unir os pontos médios do “papagaio de papel”:

Lourenço: Une lá os pontos médios, o que vai dar? Um trapézio? Abre o livro.

Catarina: Propriedades e quadriláteros!

Lourenço: Estamos a falar de quadriláteros. Não é um rectângulo, senão este ponto teria de ser mais acima.

Catarina: E se eu fizer assim.

Ainda no desenvolvimento da primeira actividade de investigação, o aluno procurou avaliar as suas conclusões: “Olha lá, isto não vai dar um quadrado, dá um losango e no meu trapézio dá um losango!”. Na tarefa sobre *Pavimentações*, o aluno foi registando os polígonos que não formavam pavimentações regulares e as respectivas justificações: “o pentágono não dá! No vértice não podemos unir”. Esta avaliação do trabalho desenvolvido foi uma constante em todas as actividades de investigação. No entanto, o aluno ao efectuar registos escritos privilegia sempre a inclusão das explorações bem sucedidas, raramente refere as explorações que efectuou sem sucesso. Por exemplo, na tarefa sobre o número de zeros de uma função polinomial, detectei na gravação áudio a seguinte afirmação: “estava a pensar como seria uma função que tivesse só um zero: $Y = 0X - 5$? Ou $Y = X$? As de 2º grau podem não ter zeros, as do 1º

têm sempre um”, mas esta parte da investigação não foi registada no relatório escrito sobre o trabalho realizado.

Como já foi referido, o Lourenço auto-avalia o seu trabalho sistematicamente, usando como sistema de referência os conhecimentos que detém ou as diversas interacções que vai estabelecendo, quer com os colegas, quer recorrendo ao professor.

Veja-se a propósito de $Y = (X - 2)^3$ e de $Y = X^3 - 2$, na quarta tarefa:

Lourenço: Quando está entre parêntesis, mostra o ponto de intersecção com o X, quando está fora mostra o Y. Tem -2 intersecta o 2 no eixo do X, e o 2 fora intersecta o 0Y. Dentro de parêntesis, o simétrico é o zero e fora é a ordenada, do eixo 0Y.

João: O zero é raiz cúbica de 2?

Lourenço: O outro dá!

E

João: Para que são esses números todos?

Lourenço: Este não diz, mas o outro das férias dizia para identificar as intersecções com os eixos. É importante. Para estudar. Professor?

Professor?

Eu: Diz.

Lourenço: Fiz $Y = X^3$, ou outro $[Y = -X^3]$ é igual já sei! É necessário fazer?

Eu: Podem comparar as duas, não têm de fazer as duas.

E

Lourenço: Vou indicar os zeros analiticamente: $X=0$. É isso, crescente do $-\infty$ ao zero e do zero ao $+\infty$. Não tem extremos. Intervalos de monotonia: crescente e decrescente. Crescente ...Óh stor? No zero também está a crescer não está?

Nas outras tarefas, também existem exemplos que evidenciam a realização da auto-avaliação:

[No cálculo de comprimentos na primeira tarefa] A outra diagonal é ...

Eu queria fazer este, mas não estava a ver como era a diagonal, não é com o Teorema de Pitágoras! Não é um triângulo rectângulo.

[Na exploração das Pavimentações] Os triângulos isósceles, eu acho que não. Só quando esta aresta está virada ao contrário, têm de ser todas iguais.

[Na exploração do número de zeros de uma função polinomial] A função $Y=X$ é uma recta, não preciso fazer graficamente!

Os exemplos apresentados também mostram que o aluno reflecte sobre a própria aprendizagem. No entanto, na auto-avaliação através da reflexão escrita sobre o trabalho desenvolvido tece poucos comentários sobre como decorreu a sua investigação. Na primeira tarefa referiu-se à forma aberta como a questão de investigação foi proposta, à importância das minhas intervenções para o trabalho do grupo, em especial das que se dirigiam a si e finalmente, à questão do tempo facultado para a concretização da investigação. Na segunda tarefa, o Lourenço refere-se às interacções que estabeleceu comigo, considerando-as como uma orientação para a concretização, mas desvaloriza a importância do trabalho de grupo e inclui no texto os conhecimentos usados na concretização da investigação. Ainda na actividade *Pavimentações*, o Lourenço explica como os conhecimentos que tinha sobre a soma dos ângulos internos de um polígono contribuíram para a generalização da sua conjectura, nomeadamente para justificar que o pentágono regular não formava uma pavimentação regular. Sugere então que o enunciado deveria incluir a amplitude dos ângulos internos dos diferentes polígonos. Também esclarece que, na sua opinião, foi este o conhecimento que lhe permitiu o sucesso da investigação.

Na reflexão sobre a terceira tarefa, o Lourenço mostra a importância que as experiências iniciais tiveram para a concretização da actividade de investigação:

Após realizarmos algumas experiências das equações, com o seu devido grau, observamos, que consoante a sua forma era fácil de descobrir quantos zeros a função poderia ter. (Reflexão escrita do Lourenço, 31/3/2004)

Refere-se, também, à discussão ocorrida entre os vários grupos na apresentação de resultados, em particular, discute a exploração apresentada por um grupo em comparação com a realizada pelo seu grupo de trabalho. Nesta tarefa, as interacções com os colegas foram as privilegiadas.

Na reflexão sobre a quarta tarefa, o destaque vai para o papel que o professor teve no início da investigação, a interacção com o colega, a avaliação do trabalho realizado e o caminho seguido na exploração da tarefa. É de notar a importância que o Lourenço deu à auto-avaliação do trabalho realizado, identificando as conclusões que o seu colega de grupo chegou, comparadas com as suas, fazendo a ancoragem com os conhecimentos de que era detentor e salientando o rigor da apresentação dos seus gráficos:

Acho o meu trabalho positivo, penso que mais uma ou duas aulas não ficava mal, pois dava para tirar mais umas conclusões. Podia avançar mais. O meu colega apenas explorou as sugestões. Eu encontrei todos os possíveis aspectos do gráfico de uma função cúbica e apresentei-os com a identificação dos pontos de intersecção nos eixos. (Reflexão escrita do Lourenço, 27/4/2004)

Na sua reflexão escrita sobre o trabalho desenvolvido, na quarta tarefa, também se refere às indecisões do seu colega relacionadas com o início da investigação, às interacções estabelecidas com ele e às orientações dadas pelo professor:

Logo quando foi entregue a ficha e lida, as 2 primeiras questões, o meu colega dizia que sim. Passados 2 minutos já dizia que não, embora eu tenha continuado na minha e continuei a estudar. O Professor ajudou-me a representar graficamente e com rigor. (Reflexão escrita do Lourenço, 27/4/2004)

Globalmente, na reflexão escrita, o Lourenço inclui os seguintes aspectos: o enunciado da proposta de investigação, o tempo destinado à realização da investigação, as experimentações iniciais realizadas quando existem, o papel dos conhecimentos utilizados para a concretização da investigação, a importância das interacções estabelecidas com o professor e com os outros elementos do grupo de trabalho e os erros e as dificuldades sentidas. As características apresentadas prendem-se com a existência de um guião para a elaboração da reflexão escrita, mas é de salientar que o nível de profundidade da reflexão foi aumentando com o decurso do processo de recolha de dados, evidenciando assim uma aprendizagem acerca do modo como reflecte sobre a aprendizagem. O Lourenço na primeira tarefa inclui apenas características que são relativas ao trabalho desenvolvido, enquanto que, de forma gradual, nas seguintes vai incluindo considerações relativas à aplicação de conhecimentos, às interacções e à sua auto-avaliação do trabalho realizado.

Passando aos relatórios escritos e começando pela primeira tarefa, o Lourenço refere-se também à questão, segundo ele, pouco objectiva que lhe foi proposta para a investigação. Na falta da afirmação de que o polígono a obter seria um paralelogramo, o Lourenço sentiu muitas dificuldades em dar continuidade à sua investigação. Perante a dificuldade de caracterizar o polígono resultante da sua investigação, desviou-se para

o cálculo de perímetros e comprimentos, procurando assim uma relação entre as diagonais do quadrilátero inicial e os lados do paralelogramo:

Relativamente ao Lourenço; ele não considerou o rectângulo como um quadrilátero. Este facto desviou a sua investigação para o cálculo de comprimentos e áreas. Ao tentar encontrar o tipo de polígono que se obtém unindo os pontos médios de um quadrilátero, não foi capaz, pois em todos os casos encontrava um paralelogramo, excepto num! (Diário de bordo, 12/12/2003)

No relatório sobre esta tarefa, o Lourenço não descreve os avanços e os recuos verificados na sua investigação, limita-se a apresentar algumas conclusões sem justificação mas acompanhadas de figuras exemplificativas:

Neste quadrilátero obtive um rectângulo.

Neste quadrilátero obtive um losango.

Neste quadrilátero obtive um paralelogramo.

Neste trapézio obtive um losango. (Relatório escrito do Lourenço, 12/12/2003)

Já na tarefa seguinte, *Pavimentações*, inclui a exploração e as dificuldades surgidas:

Pavimentações regulares são aquelas que cobrem totalmente uma superfície, por polígonos regulares. Experimentei o triângulo, o losango, o hexágono, o quadrado e o pentágono. Tive dificuldade no pentágono, que não formava uma pavimentação regular. (Relatório escrito do Lourenço, 4/2/2004)

Na terceira tarefa, apresenta três exemplos que justificam a conclusão de que a função de 1º grau tem sempre um zero. Na função de 2º grau, dois exemplos de função que não têm zeros, dois exemplos com dois zeros e dois exemplos com um zero. Para as funções de grau três, apresenta apenas uma expressão e a conclusão. Como balanço final da terceira tarefa, o Lourenço evoca o diálogo existente entre os diferentes elementos do grupo durante a actividade de investigação e o facto de na discussão ter conseguido explicar à turma a diferença do número de zeros, consoante o grau é par ou ímpar:

Com os colegas, fomos dialogando enquanto fazíamos o trabalho. As conclusões eram semelhantes entre os elementos do grupo.

Penso, quando houve a discussão de resultados, soubemos explicar a relação que havia entre os graus par e ímpar. (Reflexão escrita do Lourenço, 31/3/2004)

O relatório elaborado para a quarta tarefa apresenta os diferentes tipos de gráfico da função cúbica, discute-os e responde ao problema inicial de investigação. Começa por estabelecer as diferenças entre as funções $Y = X^3$ e $Y = -X^3$ com base nas suas características gerais, sem apresentar uma conclusão globalizante. Depois, estuda as funções $Y = (X - 2)^3$ e $Y = X^3 + 2$, registando uma conclusão globalizante. Finalmente, generaliza para qualquer função cúbica o respectivo tipo de gráfico.

Globalmente, os aspectos incluídos nos relatórios prendem-se com os processos utilizados na investigação, os recursos utilizados, os conhecimentos, as dificuldades, as estratégias utilizadas para as ultrapassar e as conclusões resultantes da investigação. Estes aspectos estão relacionados com a necessidade de resposta à questão proposta para investigação. Nos relatórios escritos também foi evidenciada uma progressão nas características incluídas à medida que o ano lectivo foi avançando. Podem ser identificados os seguintes progressos:

Quadro 5: Características incluídas nos relatórios escritos do Lourenço.

Primeira tarefa	Sem descrever o processo, apresenta, sem justificação, algumas conclusões acompanhadas de figuras.
Segunda tarefa	Descreve o processo e as dificuldades sentidas na interpretação da tarefa.
Terceira tarefa	Descreve o processo e as dificuldades sentidas durante a investigação e discute o objectivo final face ao enunciado da tarefa. Refere o facto de não existirem sugestões de investigação.
Quarta tarefa	Descreve o processo e as dificuldades sentidas durante a investigação. Faz a discussão dos resultados em relação à proposta inicial e às sugestões incluídas no enunciado da tarefa. Inclui as interações e a forma como estas influenciaram o seu trabalho.

Esta evolução dos relatórios está, também, relacionada com uma evolução progressiva na profundidade da reflexão que o Lourenço foi mostrando acerca da sua aprendizagem. O crescimento ao nível da realização do trabalho investigativo e da sua apresentação proporcionou-lhe ainda um maior domínio dos conteúdos apreendidos e das capacidades adquiridas.

Síntese do capítulo

O Lourenço é um aluno empenhado nas actividades da sala de aula e reconhece o valor educativo das investigações matemáticas. Afirma gostar de actividades desafiantes e tem uma atitude positiva face à pesquisa e à investigação. Sempre teve um bom relacionamento com a matemática, ao nível das aprendizagens e das classificações obtidas.

Nas investigações matemáticas, o Lourenço segue um processo em ziguezague, caracterizado pela não linearidade, onde atribui muita importância ao reconhecimento das situações, como uma forma de encaminhamento e orientação para a concretização do trabalho investigativo. A etapa da interpretação do enunciado tem um grande significado para o início e para o prosseguimento do seu trabalho investigativo na medida que é a partir dela que todo o trabalho é delineado.

O aluno utiliza dois processos de interpretação: a ancoragem, onde procura as relações que as propostas proporcionam com os conhecimentos anteriormente adquiridos, e a realização de algumas experiências iniciais, onde experimenta casos particulares. O aspecto da ligação, ancoragem, com aquilo que já tinha sido feito, ou investigado, permite-lhe ultrapassar as dificuldades iniciais que surgem na compreensão da tarefa. Noutras situações, tive de intervir para que o Lourenço ultrapassasse as dificuldades iniciais.

No desenvolvimento da sua actividade de investigação, o Lourenço mostrou ser um aluno reflexivo que utiliza um sistema de interacção crítica consigo mesmo com vista a atingir o sucesso (Perrenoud, 1999). Este mecanismo de auto-avaliação foi visível em vários momentos e reforça que a sua perspectiva sobre a aprendizagem é congruente com as suas práticas, sendo o conhecimento construído pelo próprio (Davis & Mason, 1989). Através de sucessivos avanços e recuos, é um aluno que ziguezagueia entre aquilo que já sabe e aquilo que procura saber para dar resposta às propostas colocadas na investigação.

A auto-avaliação também é utilizada para clarificar ideias e construir significados (Serrazina, 1995). Muitas vezes recorre a interacções de diferentes tipos para se auto-avaliar. Confronta os conhecimentos que domina ou procura contra-exemplos junto dos colegas, e assim, o Lourenço ultrapassa as suas dificuldades e atribui significado às suas explorações. O sucesso da sua investigação está dependente desta auto-avaliação ao longo de todo o processo investigativo.

Em actividade surgem-lhe dúvidas e dificuldades e comete erros. Para responder às suas dúvidas e dificuldades raramente solicita apoio aos colegas ou ao professor, mas quando o faz o objectivo é a gestão da aprendizagem (Bain, 1988; Jorro, 2000). Na procura de resposta, a sua interacção preferida é a desenvolvida com o manual ou outro recurso material disponível no momento (Hadji, 1994). Com os outros actores do processo de ensino e aprendizagem procura obter a confirmação do caminho a seguir, pela tradução de linguagem ou negociação de significado, ou uma definição, propriedade ou técnica matemática.

Ao nível das interacções com os seus pares, verifiquei que o Lourenço valorizou na entrevista o trabalho cooperativo na actividade de investigação, mas na sua prática a actuação é caracterizada por algumas particularidades. Dinamiza formas de cooperação em que o objectivo é auto-esclarecer-se sobre algum conteúdo matemático ou dificuldade. As interacções são privilegiadas quando trazem algum conhecimento novo à sua investigação. Caso contrário, não lhe interessa. Esta característica leva-o muitas vezes a optar pela actividade individual. Na procura de esclarecimento das suas dúvidas, os colegas são, para ele, o último recurso. No seu entender, as orientações dos seus pares poderiam permitir-lhe ou não retomar o caminho correcto, ou desviá-lo definitivamente do percurso que tinha definido à partida. Ao procurar os colegas, o Lourenço dirigia-se a eles como se estivesse num monólogo, a pensar alto. Mais do que um interlocutor, quer ter um ouvinte a quem explica as suas dificuldades ao mesmo tempo que as tenta ultrapassar.

Quando é apoiado por mim, procurei dar-lhe um feedback do tipo “construindo o caminho seguinte” (Tunstall & Gipps, 1996), por se adaptar às suas características pessoais e favorecer as suas aprendizagens, tratando-se, neste caso, de uma interacção por regulação directa dos processos de aprendizagem (Perrenoud, 1999). As suas interacções preferidas dizem respeito a esclarecimentos e correcções sobre definições e propriedades matemáticas para ultrapassar dificuldades, sendo precisamente este tipo de esclarecimentos os mais incluídos na folha de apoio com notas, regras e possíveis erros. As minhas orientações, neste caso, foram também as que actuam sobre a regulação interactiva, que permitem os erros como um ajuste ou um contributo para a reorientação da tarefa (Abrecht, 1991; Hadji, 1994), o que está de acordo com a perspectiva do aluno acerca do erro, integrado no processo de ensino e aprendizagem.

Para o Lourenço, o erro orienta e faz convergir a actividade de investigação para o objectivo pré-definido, para o sucesso, e as investigações matemáticas são um tipo de

tarefa onde não ocorrem muitos erros. Perante esta constatação, agi no sentido de reconduzir o aluno ao caminho de onde se tinha desviado. De o recolocar. Congruente com esta ideia, ao intervir, tive como objectivo possibilitar a manutenção de um caminho para a interacção com o aluno, favorecendo a regulação das aprendizagens (César, 1997).

O Lourenço também considera o professor como um factor importante para a regulação das aprendizagens a outros níveis. Veja-se a consonância das ocorrências no contexto da sala de aula, referidas pelo aluno, e os aspectos referidos por Pardala (1997), acerca do papel do professor: (1) gestor do tempo estabelecido para a concretização da tarefa; e (2) os erros cometidos pelo aluno que necessitam da intervenção do professor. Outros aspectos, referidos pelo aluno, dizem respeito à importância do professor na preparação da tarefa e no apoio dado durante a actividade de investigação, o que reforça o contributo referido por Allal (1986) relativamente à regulação proactiva e interactiva.

O Lourenço foi aumentando o nível de profundidade da auto-avaliação realizada, o que lhe permitiu também um maior alcance no sucesso das últimas investigações. Na parte escrita, o Lourenço passou de um registo de conclusões, sem descrição do trabalho realizado, na primeira tarefa para um relatório melhorado na quarta tarefa, onde inclui as interacções estabelecidas com o colega com que trabalhou em díade, a discussão dos resultados, o rigor de apresentação de resultados e a pertinência no trabalho desenvolvido. Esta progressão, na minha opinião, deveu-se ao facto de o aluno ter percebido que ao fazê-lo estava a desenvolver novas aprendizagens. Ao reflectir sobre o que tinha realizado, e como o tinha feito, leva-o a incluir cada vez mais pontos nos seus relatórios, o que lhe proporciona a tomada de consciência das aprendizagens conseguidas.

CAPÍTULO VII A MARTA

Apresentação

A Marta é uma aluna de quinze anos, alta e magra, de cabelos e olhos castanhos. Com um percurso de aprendizagem considerado com aproveitamento “razoável” a matemática, com classificações situadas nos níveis três e quatro do 3º ciclo. Recorda com satisfação um episódio marcante na sua vivência escolar, a obtenção da classificação de 100% num teste de matemática no 8º ano. Mas, foi uma aluna que se distinguiu de outros, desde o início do ano lectivo, que mostra o seu interesse e disponibilidade para aprender e experimentar novas abordagens, o que foi sendo demonstrado gradualmente.

É bastante participativa e interveniente nas aulas, gosta de questionar os “porquês” e de colocar em causa os diferentes conhecimentos com que é confrontada. Como tem perspectivas de prosseguimento de estudos nas áreas das engenharias, dá muita importância à matemática e às suas aplicações. A sua facilidade de comunicação escrita e oral tende a proporcionar-lhe a expressão correcta dos seus raciocínios e das suas interrogações. É reflexiva, pela diversidade de interrogações que lança acerca dos diferentes conteúdos com que se depara, estabelece rapidamente conexões entre os diferentes conteúdos e questiona-se acerca das diferentes abordagens que lhes poderá dar.

No início do ano lectivo, a Marta tinha alguma dificuldade em trabalhar com tarefas de investigação, perdia-se à procura da solução e não tentava explorar os diferentes caminhos que a tarefa continha. Com o decorrer do tempo, a Marta começou a reconhecer o valor educativo deste tipo de actividade e a desenvolver hábitos de abordagem de uma investigação. As características enunciadas fizeram com que a Marta fosse incluída nesta investigação como um estudo de caso.

Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem

A Marta considera a matemática como “a ciência mãe de todas as ciências”, embora numa perspectiva científica de explicação da realidade. Salienta o facto de na natureza tudo estar organizado de uma determinada forma e de nós funcionarmos de uma forma organizada naquilo que fazemos, por exemplo:

uma pessoa está a fazer, por exemplo, um bolo ou a cozinhar qualquer coisa não vai meter assim quantidades à toa. Tem que ter uma certa [quantidade], tem que se guiar de uma certa maneira, para não ficar uma coisa desproporcional. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

Demonstrou o seu gosto pela disciplina ao longo da entrevista e deixou escapar a sua predilecção por alguns conteúdos: sistemas de equações lineares e cálculo.

Para a Marta, não existiram dificuldades de adaptação ao 10º ano. Ela considera a matéria mais “puxada”, aceita e compreende esse facto com naturalidade, atribuindo-o a se tratar de um nível de escolaridade com objectivos e exigências diferentes das do ensino básico.

Relativamente à Matemática, queixa-se da pouca prática de exercícios que existente na aula e do pouco trabalho com dados reais. No seu entender, as aulas com mais aplicações reais seriam mais participativas e proporcionariam aos alunos a exposição dos seus pontos de vista, o que contribuiria para o melhor esclarecimento das suas dúvidas:

Devia ser sobretudo mais para a prática, como eu já disse, a matemática não é assim muito teórica então deve ter uma grande parte prática, muitos exercícios, teórica à mistura, não é, claro! E não sei, talvez ao mesmo que tempo que se explica e fazendo exercícios com os alunos a fazerem intervenções. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

No que diz respeito às investigações, não foi muito convicta, talvez por não ter hábitos de trabalho ao nível das investigações matemáticas. Para ela, realizar uma investigação, é aplicar os seus conhecimentos à resolução de determinadas situações mais complicadas e a situações reais. Na sua visão da disciplina, a aplicação a exemplos da vida real é o tipo de trabalho que favorece a aprendizagem:

... se calhar tentava misturar assim exemplos, dar muitos exemplos, tipo exemplos reais coisas assim. Quando fosse para saber a área de qualquer coisa, tentava usar exemplos reais dizer mesmo uma parte real que nós pudéssemos palpar, fazer com números que fossem perto da realidade para perceber melhor. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

A Marta considerou que os professores, na avaliação, não valorizam o trabalho desenvolvido nas aulas. Salienta que, nas aulas e para a avaliação, deveriam valorizar o raciocínio, o esforço, a forma como os conhecimentos são adquiridos e a sua aplicação.

Sem se referir aos testes escritos, salienta que o principal instrumento de avaliação deveria ser a observação nas aulas:

[Nas aulas e na avaliação] acho que o que conta deve ser o raciocínio, o nosso raciocínio, a nossa tentativa de, não por exemplo olharmos para um problema de matemática e ahh não consigo! E pára por ali. Se pudermos tentar e dizer eu não consigo assim ou perguntar como é que se faz vamos chegar a algum lado ou ao resultado. Talvez os conhecimentos e a forma como se aplicam. Se calhar através das aulas, perguntar e fazer tentativas, por exemplo, não é bem a tirar dúvidas, pôr questões durante as aulas, quando se está a fazer exercícios ou mesmo mandarem-nos ir ao quadro quando se tem exercícios para fazer. Se calhar, assim, o professor depois conseguia ver o que cada um sabe. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

A avaliação foi concebida como tendo um carácter formativo muito grande para a Marta, na forma de regulação das aprendizagens: “se não avaliarmos como vamos saber em que ponto é que estamos?” (Entrevista da Marta, 2/12/2003). Esta afirmação não está relacionada com as classificações, situa-se na avaliação formativa e ao nível da aprendizagem. A Marta apresentou as suas propostas, para o dia-a-dia, que passam precisamente pela avaliação formativa e pela regulação das aprendizagens:

Talvez mais, aquelas fichas que nos mandam fazer, tipo ou exercícios do livro que nos mandam entregar. Se formos a ver, algumas coisas do teste podem falhar ou ficamos mais nervosos, ou esquecemos sempre qualquer coisa. Se fossem assim pequenas coisinhas fichas e as perguntas, coisas assim, se calhar iam ajudar mais, para os que têm mais dificuldade, principalmente. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

A Marta dispõe de um dispositivo de avaliação reguladora que executa, segundo ela, antes do teste. A aluna, através de uma listagem dos tópicos leccionados, procura aferir os seus conhecimentos com aquilo que lhe poderá ser exigido, para detectar as suas falhas ou dificuldades e as poder ultrapassar:

Antes do teste, às vezes, verifico os tópicos ou qualquer coisa e digo: percebo disto ou não percebo disto e tento batalhar mais naquilo que eu não percebo. Tento ir à parte teórica, ao livro, aos cadernos e penso que é basicamente isso, ou tirar dúvidas com alguém. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

Perante a detecção de erros no desenvolvimento de uma investigação, a aluna tem uma atitude bastante moderada. Aceitando-o como natural, procura encontrar a regra que está mal aplicada ou o raciocínio erróneo que conduziu a um resultado absurdo. Tenta desta forma, perceber os erros que comete para não os repetir no futuro:

Às vezes tento ver várias vezes para ver onde errei, qual, se me faltou algum passo ou se devia ter aplicado qualquer coisa que não apliquei, pelo menos faço assim! (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

Na tentativa de ultrapassar as dificuldades surgidas e corrigir os erros, a Marta afirma procurar em livros, por exemplo exercícios diferentes ou de repetição de conteúdos, para praticar. Mas, quando não encontra o que pretende, inventa:

Procuo em vários livros ou tento fazer na minha cabeça se isto é assim, se eu fizer de tal maneira ia ser assim, às vezes também faço isso. (Entrevista da Marta, 2/12/2003)

Actividade de investigação e avaliação

Interpretação da tarefa

O primeiro impacto da Marta com uma proposta de investigação é caracterizado pela dificuldade de encontrar um caminho para iniciar a investigação. A Marta lê a proposta mais do que uma vez e tenta interpretar as questões que lhe são colocadas. A compreensão acaba por ser feita por tradução da investigação por outras palavras. O que sucedeu nas quatro tarefas:

[Unindo os pontos médios de um quadrilátero ...]

Marta: Quadriláteros?

Sofia: Os que se encontram aqui na folha.

Marta: Estudar a união dos pontos médios de um polígono de quatro lados!

[Pavimentações]

Marta: Para nós sabermos os polígonos regulares que pavimentam e porquê!

Joana G.: E porque pavimentam?

Marta: Um quadrado assim, e um rectângulo, não é regular, regular?

Joana: Regular é...

Marta: Quando é sempre o mesmo polígono, formam a mesma figura assim.

[Zeros de uma função polinomial]

Marta: Onde é que vamos tirar as expressões das funções?

Catarina: Inventamos!

Marta: Não pode ser ao acaso, Stor?

Catarina: Espera. Investiga, ou seja, para cada grau experimentas funções diferentes.

[Uma investigação com funções cúbicas]

Miguel: Função cúbica? É uma parábola, a cúbica ou a quadrática?

Marta: Quadrática é uma parábola! Mas não é isso.

Miguel: É. Seguimos estes pontinhos [as sugestões] e no final damos a resposta.

Marta: ok.

Na opinião da aluna é, precisamente, na fase de interpretação que existe a única dificuldade das investigações matemáticas. A partir do momento que estão esclarecidas todas as dúvidas acerca do caminho que deve seguir para desenvolver a sua investigação, a Marta acredita que o restante percurso surge naturalmente, em cadeia:

Penso que por um lado é um bom trabalho, porque nos obriga a pensar e a tentar aplicar vários conhecimentos que já adquirimos, por outro lado é um bocado confuso porque não sabemos donde partir, que caminhos devemos seguir, nem a que regras devemos obedecer, para chegar a uma teoria. Depois de começar, tudo fica mais fácil. (Reflexão escrita da Marta, 12/12/2003)

Nos avanços conseguidos, a Marta reconhece a importância das interações com os colegas ou com o professor como uma forma de ultrapassar as dificuldades de interpretação:

As intervenções do professor que me ajudaram a orientar foram intervenções relativamente à forma gráfica das funções e também relativamente a que expressões de várias funções para experimentar. (Reflexão escrita da Marta, 31/3/2004)

O estabelecimento da conjectura inicial faz parte da fase de interpretação da tarefa. A Marta interpreta a proposta traduzindo por outras palavras a questão de investigação e dá início ao seu trabalho de investigação começando por estabelecer e explorar uma dada conjectura. Daí que seja importante a interação dos colegas, na ajuda que dão para o estabelecimento da conjectura inicial, através das diferentes opiniões manifestadas. A partir do momento que se traduz a tarefa e se estabelece a conjectura de partida, a investigação está encaminhada. Na prática, durante a

investigação aparecem outras conjecturas, mas que na opinião da aluna, emergem da necessidade de explorar outras “pistas” que surgem da própria exploração. Na opinião da Marta, investigar é construir uma cadeia de conjecturas e experiências que dão origem a conclusões.

Em todas as tarefas é possível encontrar uma conjectura de partida e que resulta da interpretação dada à proposta de investigação:

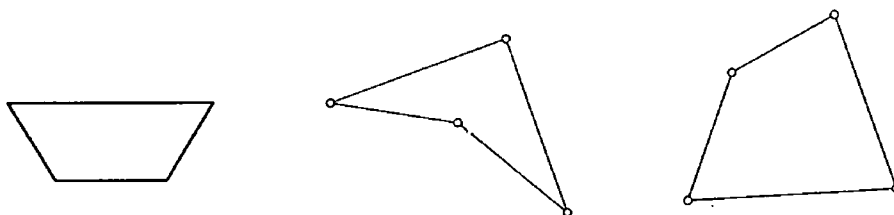
1ª Tarefa: Unindo os pontos médios do quadrilátero obtém-se outro quadrilátero?

2ª Tarefa: Pavimentação regular é quando os polígonos que estão todos no mesmo vértice são regulares?

3ª Tarefa: O número de zeros dependerá do expoente?

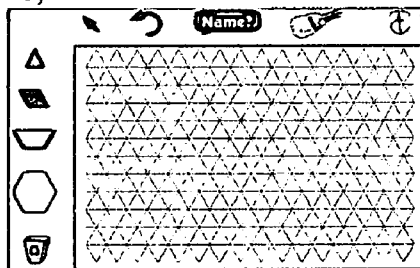
4ª Tarefa: Não é quadrática. Cúbica? Veremos. Vamos experimentar com números concretos.

A existência de figuras ou sugestões de investigação, também, têm um papel de facilitadores da interpretação e da definição do caminho de abordagem. Por exemplo, na primeira tarefa, a Marta adoptou como base de trabalho os três quadriláteros fornecidos na proposta de investigação:



Também explorou, em *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, as sugestões apresentadas na proposta. Registrando, no relatório final do trabalho realizado, considerações relativas à sugestão investigada: paralelismo das diagonais do quadrilátero inicial em relação aos lados do paralelogramo. Em *Pavimentações*, a Marta experimenta os polígonos fornecidos no AGD:

Marta: Vamos experimentar, temos aqui: o triângulo, o losango, o trapézio e o hexágono, devem dar todos!



Na tarefa, *Zeros de uma função polinomial*, a proposta de trabalho foi feita de forma aberta e sem sugestões. Este facto, desencadeou na Marta alguma atrapalhação inicial, uma vez que não sabia que rumo dar à sua investigação nem onde poderia encontrar as expressões das funções para realizar as experiências.

Em *Uma investigação com funções cúbicas*, perante a existência de sugestões de trabalho, a Marta não teve dúvidas em segui-las:

Podemos fazer o estudo e no fim dizer se é cúbica ou não, e nesse momento, dizer que não é quadrática. Porque as quadráticas têm determinadas características de domínio, contradomínio, zeros, etc....

A utilização dada às figuras ou às sugestões existentes nas propostas de investigação, no caso da Marta, contribuem para uma melhor interpretação do trabalho a realizar e para o estabelecimento de um percurso de investigação, surgem como um catalizador.

Desenvolvimento da tarefa

No desenvolvimento da actividade de investigação é possível afirmar que a Marta é organizada na concretização e apresentação dos seus resultados. Depois de ultrapassar as dificuldades iniciais de interpretação e de definição de um percurso de investigação, começa por estabelecer a conjectura de partida. Investiga-a e regista as conclusões, que desencadeia novas conjecturas e motiva a realização de novas investigações: conjecturas e experiências. Na abordagem dada às investigações matemáticas segue o percurso de conjecturar, experimentar e solucionar. Pois, é uma aluna que dá muita importância ao estabelecimento de uma solução para a investigação. Mais do que uma conclusão, é importante encontrar uma solução. Não no sentido de um valor numérico, mas no aspecto de solução dos diferentes problemas abertos através da investigação matemática.

Na primeira tarefa, *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, a Marta usa os quadriláteros, apresentados como figuras na proposta de investigação, para dar início à sua investigação. Começa por marcar os pontos médios dos quadriláteros e construir o polígono que se obtém. Confirma desta forma que se trata de um quadrilátero. No entanto, quando questionada acerca da classificação desse quadrilátero ficou atrapalhada. E registou conclusões parciais para cada um dos exemplos:

Exemplo 1 [“papagaio de papel”], a união dos pontos médios forma um rectângulo;

Exemplo 2 [trapézio], a união dos pontos médios forma um losango;

Exemplo 3 [figura plana de 4 lados de comprimentos diferentes], a união dos pontos médios forma um paralelogramo. (Relatório escrito da Marta, 12/12/2003)

Como não conseguiu solucionar a questão, resolve não se referir ao resultado (que a partir da união dos pontos médios de um quadrilátero se obtém um paralelogramo). A Marta passa a explorar outras relações, estabelece novas conjecturas, entre o quadrilátero inicial e o polígono [paralelogramo] resultante. Por exemplo, o paralelismo dos lados do polígono com as diagonais do quadrilátero inicial. As conclusões a que chegou são “generalizadas”, para ela, através da afirmação “que se verifica para todos os quadriláteros que investiguei”.

Na segunda tarefa, *Pavimentações*, a Marta experimenta todas as figuras disponíveis no AGD, para verificar se dão ou não origem a pavimentações regulares. Durante esta exploração, a Marta apercebe-se que os polígonos experimentados não são todos regulares, o que a leva a estabelecer de imediato uma conjectura inicial: “Pavimentação regular é quando os polígonos que estão todos no mesmo vértice são regulares?”.

Durante a exploração, a Marta deparou-se com um problema de linguagem: pavimentação regular é formada apenas por um polígono regular ou pode conter vários polígonos regulares:

Eu: Imagina como seria uma pavimentação formada por polígonos não regulares.

Marta: Stor, não estou a perceber o que quer dizer.

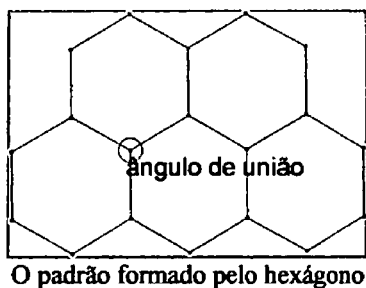
Eu: Constrói uma pavimentação com um dado polígono irregular.

Marta: Como? É impossível, não fecha. Todos os lados têm de ser iguais! Polígonos regulares dão pavimentações regulares. Vamos experimentar.

A seguir, a investigação decorre através da experimentação de diversos polígonos, quadrado, triângulos, losangos, pentágonos e hexágonos. Nos pentágonos a questão da não pavimentação foi pacífica, uma vez que a aluna já tinha verificado o que se passava com os polígonos irregulares. Acabou por chegar à conclusão que o pentágono, na tentativa de pavimentar, dá origem a várias brechas. Relativamente ao hexágono, a aluna subdividiu o hexágono em triângulos equiláteros e concluiu a partir

daí que se trata de uma pavimentação regular. Acrescentou, assim, o hexágono à lista de pavimentações regulares com o argumento que são formadas por polígonos regulares e têm os ângulos de união igual a 360° .

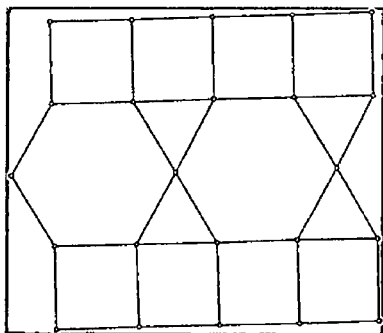
(Relatório escrito da Marta, 04/02/2004)



A exploração da tarefa não ficou por aqui, a Marta explora também as pavimentações que resultam da conjugação de vários polígonos regulares. Tendo em atenção que “a soma dos ângulos no vértice de união tem de ser 360° ” e regista no relatório as conclusões acerca deste tipo de pavimentações:

As pavimentações podem ainda ter um padrão com 2 ou mais polígonos regulares. Mas, deixam de ser pavimentações regulares, como é óbvio, porque não têm um só polígono, tem vários que por sua vez têm ângulos diferentes.

Por exemplo,



Estes padrões têm apenas que ter todos os vértices contornados pela mesma disposição de polígonos regulares. (Relatório escrito da Marta, 4/2/2004)

Nas *Pavimentações*, a generalização é identificável pelo de facto de referir que existem apenas três pavimentações regulares e que uma disposição de polígonos forma uma pavimentação quando os vértices são contornados pela mesma disposição de polígonos regulares.

Em *Zeros de uma função polinomial*, a Marta conjecturou que o número de zeros de uma função polinomial está relacionado com o termo de maior grau do polinómio. Esta conjectura orientou a sua exploração, assim como serviu a organização e a apresentação dos resultados. Foi explorando sucessivamente. No 1º grau, experimentou as expressões $f(X) = -4X - 4$, $g(X) = X$ e $h(X) = 12X - 4$. Utiliza a calculadora gráfica para fazer as respectivas representações gráficas e para determinar os zeros. Após o registo das expressões, dos gráficos e dos zeros, concluiu a existência de apenas, e sempre, de um zero. Para o 2º grau, explorou $i(X) = -4X^2 - 4$, $j(X) = X^2$ e $k(X) = 12X^2 - 4$, curiosamente os mesmos valores numéricos das expressões do 1º grau, mas agora aplicados ao 2º grau. A apresentação dos resultados seguiu os mesmos moldes, representação gráfica, zeros e registo da conclusão:

Através das funções que agora estudei, cheguei à conclusão que uma função de 2º grau pode ter 0 zeros, visto o vértice estar acima ou abaixo do eixo OX, e a concavidade poder ser voltada para cima ou voltada para baixo. Pode também ter um zero, nos casos em que a função está sobre o eixo OX, independentemente da concavidade. E pode, ainda, ter 2 zeros. Quando a função tem o vértice abaixo do eixo OX e tem a concavidade voltada para cima ou quando tem o vértice acima do eixo OX e tem a concavidade voltada para baixo. Isto, porque são sempre parábolas. (Relatório escrito da Marta, 31/3/2004)

As conclusões apresentadas mostram o nível de profundidade atingido pela aluna para poder relacionar os diferentes tipos de gráficos com o número de zeros de cada um. Para além da importância de o comunicar, é de salientar a forma como a aluna o faz, ao mesmo tempo generaliza a relação entre o tipo de gráfico, o vértice, a concavidade e o número de zeros.

Relativamente ao 3º grau, são exploradas as expressões $l(X) = -4X^3 - 4$, $n(X) = X^3$, $m(X) = X^3 - 4X^2 - X + 5$ e $o(X) = X^3 + 4X$. Para todos, apresentou as respectivas representações gráficas, os zeros e não foi capaz de generalizar a relação entre o número de zeros e o aspecto do gráfico:

Através das funções que verifiquei posso concluir que uma função do 3º grau pode ter 1 zero, 2 zeros ou 3 zeros, sem nenhuma condição específica, visto que o gráfico desta função não tem uma forma específica. (Relatório escrito da Marta, 31/3/2004)

Para o 4º grau, explora seis expressões, para as quais apresenta os gráficos e os zeros no relatório. As expressões exploradas foram: $o(X) = -4X^4 - 4$, $p(X) = X^4$, $q(X) = 12X^4 - 4$, $r(X) = X^4 - 4X^3 - X^2 + 5$, $s(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 16)$ e $t(X) = X^4 - 9X^2$. Não generaliza a questão para os polinómios de 4º grau, mas apresenta uma conclusão, mesmo estando consciente das limitações que incorpora, ou seja, que a conclusão é possível apenas para os exemplos explorados. No entanto, a preocupação em responder à questão inicial de investigação surge como tratar-se de uma generalização:

Uma função deste tipo pode ter 0 zeros, 1, 2, 3 ou 4 zeros. Pode ser representada por uma espécie de parábola ou uma forma aproximada. Neste estudo posso ainda concluir que os graus das funções vão ser iguais ao número máximo de zeros possíveis. (Relatório escrito da Marta, 31/3/2004)

Na 4ª tarefa, a Marta explora onze expressões de funções cúbicas, que são acompanhadas do estudo das características gerais: zeros, domínio, contradomínio, monotonia e continuidade. Após a primeira investigação, onde pretendia encontrar que tipo de curva que padronizava as funções cúbicas, a Marta regista uma conclusão que pretende generalizar o problema do aspecto do gráfico:

Uma função cúbica é representada por uma linha deste tipo:



ou seja, que vai de baixo para cima, mas não tem de ser sempre crescente, pode ter inflexões. Ou o inverso. (Relatório escrito da Marta, 27/4/2004)

A investigação continua com a exploração de diferentes parâmetros envolvidos na expressão cúbica e o estudo das respectivas influências. Pretendia, a Marta, encontrar os parâmetros que influenciariam as supostas inflexões que tinha referido no aspecto do gráfico. A procura de conclusões parciais tinha por objectivo solucionar o problema de encontrar um aspecto generalista do gráfico de uma função cúbica. Esta foi uma dificuldade processual.

Durante as diferentes actividades de investigação, a Marta confrontou-se com outras dificuldades, que estavam relacionadas com o desconhecimento de alguns

conceitos matemáticos. Nas *Pavimentações*, a primeira dificuldade surgiu precisamente no termo “pavimentação”:

Marta: Pavimentação? Pavimenta? Stor, não estou a perceber o que se quer!

Eu: Pavimentar, preencher o chão com um ladrilho!

Esta dificuldade foi ultrapassada com a minha intervenção. No entanto, existem outras dificuldades que foram ultrapassadas com as intervenções dos alunos. É o caso, da necessidade de obter uma conclusão a partir das investigações realizadas para a função cúbica (4ª tarefa):

Marta: Agora é as conclusões. Que dizer, como explicar o tipo de curva?

Miguel: Vamos fazer como se estivéssemos a explicar a alguém!

Quando procura ajuda, através das interacções, está a reconhecer a importância do trabalho de grupo para a concretização de uma investigação. Um factor para a valorização do trabalho de grupo é, por exemplo, que a comparação das múltiplas e diversificadas experimentações que reforçam a intuição com vista à obtenção de uma conclusão e consequentemente uma generalização:

As intervenções dos meus colegas que me ajudaram a orientar foram intervenções relacionadas com a possibilidade de comparar muitas pavimentações, por parte de algumas figuras geométricas. (Reflexão escrita da Marta, 4/2/2004)

Nesta actividade as intervenções do professor e dos colegas que me ajudaram a orientar, foram intervenções relativas a conhecer possíveis e diversas representações de funções cúbicas. (Reflexão escrita da Marta, 27/4/2004)

Para corrigir os erros também foi necessário estabelecer interacções. Os erros que a Marta cometeu, estiveram relacionados com a dificuldade de lidar com os dados do problema, como é o caso das pavimentações e das figuras apresentadas no AGD. A aluna necessitou da minha intervenção porque estava com dificuldade em perceber o que era uma pavimentação. Como também não entendia o que deveria experimentar com os polígonos disponíveis, assumiu as pavimentações formadas por losangos como regulares:

Ao longo do desenvolvimento desta tarefa cometi erros como julgar que uma figura pavimentava quando não o fazia, e cometi porque estava a testar ideias minhas e a verificar que figuras pavimentam, o que veio por sua vez contribuir bastante para a concretização da tarefa, porque sem estes erros, possivelmente não chegava a nenhuma “conclusão”. (Reflexão escrita da Marta, 4/2/2004)

No caso das funções, na tarefa *Zeros de uma função polinomial*, os erros advêm do não reconhecimento do procedimento adequado à abordagem de uma actividade aberta, como era o caso. A questão colocava-se porque a Marta não sabia que expressões experimentar. Começou por tentar resolver a questão para um valor concreto de n , ao que foi interpolada pelos seus colegas. Pois o que verificaria para o valor $n=2$ poderia não ser verdade para os outros valores. Nesta investigação, as interacções entre os alunos foram fundamentais para poder concretizar:

Os meus colegas ajudaram-me nos erros que cometi. Os erros servem-me para aprender com a ajuda. Para a próxima actividade não volto a cometer os mesmos. (Reflexão escrita da Marta, 31/3/2004)

Esta dualidade: orienta e ensina, também é identificável na seguinte reflexão:

O significado dos erros que cometi, para a concretização da tarefa, foi na verdade positiva, porque foi a aquisição de conhecimentos. Sendo que ao cometer esses erros, aprendi com eles, de forma a não voltar a fazê-los. (Reflexão escrita da Marta, 12/12/2003)

Assim, a Marta concebe os erros como parte integrante do processo de aprendizagem e atribui-lhes dois papéis fundamentais. Por um lado, considera que os erros servem de orientação e encaminhamento da investigação, por outro lado, considera-os como uma lição para não os repetir.

Auto-avaliação do trabalho

A Marta é metódica e sensível às diferentes experiências executadas e tem consciência de que algumas das conclusões encontradas são verdadeiras, apenas, num número limitado de casos. Nas diferentes investigações, foi frequente, a Marta referir-se às conclusões a que chegou como válidas para aqueles casos:

Marta: [No losango] A união dos pontos [médios] dá um quadrado ou outro losango?

Sofia: Podemos concluir se dá um quadrado. E nos outros também!

Marta: Não, dá um quadrado no losango. E só neste caso.

O que se verificou na primeira tarefa, também pode ser replicado para as outras tarefas. Por exemplo, na actividade *Pavimentações*, a Marta hesitou várias vezes antes de aceitar o facto de existirem apenas três polígonos regulares a dar origem a pavimentações regulares:

Marta: Só três!

Joana G.: Sim, foi as que encontramos. Por isso existem só três!

Marta: Espera. Nós só vimos até ao hexágono.

Joana G.: O pentágono não dá. Queres continuar para aquele de sete lados?

Marta: Não. Vamos justificar porque é que não dá para mais nenhum.

Joana G.: Ahh, através dos ângulos.

Marta: Escrevemos, para os que experimentámos, dá o triângulo isósceles, o quadrado e o hexágono. Mas só para os que experimentámos.

Nas outras duas actividades, *Zeros de uma função polinomial* e *uma investigação sobre funções cúbicas*, a Marta também evidenciou a capacidade de regulação das aprendizagens. No entanto, como as outras duas investigações se encontram relacionadas com funções, as características da auto-avaliação realizada são diferentes. Trata-se de investigações em que a aluna utiliza, em diferentes expressões, conhecimentos que já detém. Por exemplo, a Marta sabe o que são os zeros de uma função, experimenta uma expressão, regista o gráfico e os zeros. Executa o processo um número elevado de vezes. Após a visualização de muitos exemplos, emergem as conclusões que são mais facilmente generalizáveis. Mas, não existe a preocupação de apresentar uma prova ou uma justificação que permita a generalização do resultado encontrado. Concretizando, ao experimentar várias funções de terceiro grau, a Marta concluiu que existem funções deste tipo com um, dois ou três zeros. Também explorou, sem sucesso, uma relação entre os diferentes parâmetros para justificar esse facto. Mas, acaba por aceitar as representações gráficas e o número de zeros, sem procurar uma explicação. Por exemplo, poderia tentar explicar os gráficos encontrados com as potências: $(-3)^3 = -27$ e $3^3 = 27$ para justificar o contradomínio e o aspecto gráfico. Também não é questionado o facto de não ter encontrado uma expressão de terceiro grau sem zeros.

É possível afirmar que a regulação das aprendizagens é realizada através da execução, de forma não aleatória, de muitas experiências. A experiência seguinte está dependente de uma avaliação dos resultados atingidos na anterior. Ao longo da investigação, vai existindo um trabalho de aferição que conduz à formação de uma ideia intuitiva que se torna generalizável, mas não existe a justificação ou prova dessa ideia:

Marta: [Em *Zeros de uma função polinomial*] $o(X) = -4X^4 - 4$, o gráfico parece um s, ao contrário. Mas passa no -4 do eixo OY. Experimenta $p(X) = X^4$ para ver se $o(X) = -4X^4 - 4$, $p(X) = X^4$ também tem o mesmo aspecto e passa no mesmo local.

No contexto de investigação matemática, a Marta executa a regulação das aprendizagens através das várias experimentações que efectua, mas a atribuição de significado surge do confronto das suas conclusões com as adquiridas pelos seus colegas.

A Marta, nas suas reflexões escritas, centra-se em três aspectos: as interacções, os erros e a auto-avaliação do trabalho realizado. Apesar da existência de um guião orientador, a aluna não o segue e o destaque para estes aspectos é transversal às quatro reflexões escritas realizadas.

Relativamente às interacções, a Marta reflecte sobre a influência que eu e os seus colegas tivemos na concretização da investigação. Sobre as interacções estabelecidas com o professor, identifica-se que as considera como uma ajuda na orientação da actividade. Algo a que recorre quando precisa obter contra-exemplos que refutem as suas conjecturas ou, em caso contrário, quando necessita de alguém que confirme o caminho que se segue. Reconhece que as minhas indicações são indirectas mas, mesmo assim, importantes para poder progredir na investigação. Também é identificável que as interacções com os seus colegas têm o mesmo papel:

As intervenções do professor bem como as dos colegas que me ajudaram a orientar, foram, determinadas pistas e interrogações sobre a minha teoria, que me levaram a pensar e repensar sobre o caminho que me tinha levado a uma conclusão (teoria). (Reflexão escrita da Marta, 12/12/2003)

As intervenções dos colegas que me ajudaram a orientar foram algumas das suas conjecturas e conclusões. (Reflexão escrita da Marta, 31/3/2004)

Os erros aparecem nas reflexões escritas como uma necessidade de reafirmar a sua natural inclusão no processo de aprendizagem. É-lhes dada uma importância relativa, no entanto, os erros são pormenores que orientam a investigação para o “bom caminho” e servem a aprendizagem.

Penso que não cometi muitos erros, foi uma investigação engraçada. Mas, penso que era necessário mais tempo para poder realizá-la devidamente, ou seja, para poder investigar e tirar conclusões, mais certas possível. (Reflexão escrita da Marta, 27/4/2004)

Relativamente à auto-avaliação, a aluna tece comentários sobre a necessária mobilização de conteúdos para dar resposta às questões de investigação, o nível de concretização da actividade e as características da proposta de trabalho. Salienta que a primeira actividade de investigação permitiu a reflexão e a aplicação de conhecimentos já adquiridos:

Penso que por um lado é um bom trabalho, porque nos obriga a pensar e a tentar aplicar vários conhecimentos que já adquirimos. (Reflexão escrita da Marta, 12/12/2003)

Mas, como se verificou na segunda tarefa, também aprecia a actividade no sentido de a considerar fácil ou não:

Para mim foi mais fácil, tínhamos mais a que recorrer para a sua realização. (Reflexão escrita da Marta, 4/2/2004)

Outro aspecto referido e que contribui para a auto-avaliação é, na opinião da Marta, a quantidade de conclusões e conjecturas que a actividade investigativa proporciona. Considerando, a aluna, que uma maior quantidade de conjecturas está associada a um bom trabalho:

Tínhamos mais conhecimentos para aplicar, o que veio facilitá-la imenso, permitindo-nos chegar a muitas conclusões e a muitas conjecturas. (Reflexão escrita da Marta, 31/3/2004)

Nos relatórios apresentados, pela Marta, como elucidativos da investigação realizada é notória a preocupação com a apresentação de conclusões, nalgumas situações elas acabam por ser o único aspecto incluído. Outra particularidade deste

trabalho escrito é a não existência de um balanço final sobre a investigação realizada. Relativamente aos processos usados nas investigações, não se encontram explícitos em alguns relatórios. Percebem-se os processos usados pela apresentação de resultados, mas não são referidas as conjecturas, eu conheço-as através das gravações, nem são referidos os conhecimentos que contribuíram para a sua aceitação ou refutação. Também, não se distinguem as dificuldades sentidas, nem os impasses que levaram a refazer conjecturas ou a reorientar a investigação.

No relatório sobre a actividade desenvolvida em *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, a Marta registou três conclusões. A primeira diz respeito à relação das diagonais do quadrilátero com os lados do polígono resultante, relacionando-a com as figuras apresentadas na proposta de investigação. A segunda relaciona-se com os polígonos resultantes da união dos pontos médios dos quadriláteros apresentados na proposta de investigação. E a terceira tenta generalizar a união dos pontos médios para o caso dos quadriláteros de quatro lados iguais, o losango e o quadrado. No primeiro relatório não é explícito o método usado durante a investigação, nem as dificuldades, nem como foram ultrapassadas, nem é realizado um balanço do trabalho investigativo realizado.

Para a actividade *Pavimentações*, a Marta começa o relatório reforçando os conceitos de pavimentação e de pavimentação regular:

Com esta investigação conclui que:

Uma pavimentação é algo que cobre uma superfície e que repete sempre um mesmo padrão, como por exemplo um chão de cozinha.

Quando estas pavimentações têm como padrão um polígono regular são chamadas de pavimentação regular. (Relatório escrito da Marta, 4/2/2004)

São apresentadas três figuras de pavimentações regulares. De forma organizada e em separado. A Marta distingue “as pavimentações que não são regulares porque não têm um só polígono regular” (Relatório escrito da Marta, 4/2/2004). Mais uma vez, apresenta três figuras que servem para exemplificar. Acompanha todas as figuras com a justificação da inclusão de cada tipo de pavimentação nos dois tipos que distingue.

Na terceira investigação, *Zeros de uma função polinomial*, o relatório inclui muitos gráficos, num total de dezasseis representações gráficas. O que evidencia o processo de investigação, caracterizado por muitas experimentações. A Marta começa por investigar os polinómios do 1º grau, não apenas os zeros, mas também outras

características. Investiga o aspecto do gráfico em relação à alteração de alguns parâmetros. Numa sucessão de experimentações passa para o 2º grau, 3º grau e 4º grau. No entanto, a Marta tem a preocupação de registar as conclusões de cada grau. Em cada grau, os exemplos são escolhidos no pressuposto de darem resposta às dificuldades sentidas ou de aprofundarem o conhecimento que ainda não esteja evidente. No final, generaliza a questão para qualquer polinómio através da apresentação de uma solução.

No relatório da quarta investigação, a Marta inclui onze representações gráficas, nas quais não se inclui os gráficos das expressões apresentadas nas sugestões de investigação. No entanto, apesar de experimentar outras expressões segue as sugestões dadas na proposta de investigação. Na apresentação dos resultados, a Marta, inclui as conclusões que lhe foram emergindo ao longo da investigação. Nomeadamente, refere-se às diferentes características dos gráficos apresentados e, no final, tenta generalizar a sua investigação ao apresentar uma aproximação ao aspecto gráfico de uma função cúbica. Do que foi relatado é possível resumir os aspectos incluídos no seguinte quadro:

Quadro 6: Características incluídas nos relatórios escritos da Marta.

Primeira tarefa	Regista conclusões. Sem referência aos processos usados ou dificuldades sentidas. Não apresenta um balanço do trabalho realizado.
Segunda tarefa	Regista conclusões acompanhadas de figuras. Percebe-se o processo usado na investigação, mas não se vislumbram as dificuldades sentidas. Não apresenta um balanço do trabalho realizado.
Terceira tarefa	Regista conclusões acompanhadas com gráficos. Percebe-se o processo usado na investigação, as dificuldades e como foram ultrapassadas. Não apresenta um balanço do trabalho realizado.
Quarta tarefa	Regista conclusões acompanhadas com gráficos. Percebe-se o processo usado na investigação, mas não se vislumbram as dificuldades sentidas. Não apresenta um balanço do trabalho realizado.

Como se pode verificar, pelas diferentes características incluídas nos relatórios, a Marta é uma aluna muito pegada ao registo de conclusões no desenvolvimento de uma investigação matemática. No entanto, pelas reflexões escritas percebe-se que a aluna evoluiu no sentido de dar mais importância aos processos, às dificuldades, aos erros e às interacções. Mas, estes aspectos nunca foram incluídos nos relatórios. A não existência de um guião para a elaboração do relatório sobre o trabalho desenvolvido possibilitou, à

Marta, a sua elaboração com base na sua concepção de relatório. Para a Marta, um relatório escrito é um documento que não inclui os percursos, mas sim as conclusões, daí que assim o tenha executado.

Síntese do capítulo

A Marta é uma aluna interessada e preocupada com a sua aprendizagem. Este aspecto permite-lhe reflectir sobre a sua aprendizagem, questionar os diferentes caminhos que pode seguir e verificar a aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos em novas situações. Nas investigações matemáticas, que a Marta teve oportunidade de realizar durante o ano lectivo em que decorreu esta investigação, foi notória a importância que lhes foi atribuída no dar sentido a novas aprendizagens (Davis & Mason, 1989).

Nas diferentes fases do processo investigativo, o principal destaque vai para a interpretação. A Marta mostra dificuldade ao interpretar as propostas de investigação, o que é coerente com as suas concepções ao considerar que a interpretação é a única dificuldade que um aluno pode ter nas investigações matemáticas.

Na fase inicial, a Marta tem dificuldade em perceber o que deve investigar e, também, qual o papel que têm as sugestões ou os conceitos envolvidos para o delinear de uma investigação. Embora as sugestões, assim como as figuras, quando existiram, tenham facilitado a interpretação inicial da tarefa, não diluem a desorientação inicial associada à definição de um percurso investigativo. A dificuldade de interpretação pode estar relacionada com a concepção que a aluna tem da realização de uma investigação, ou pela necessidade de apresentar uma resposta.

Em actividade, subdivide a sua investigação em vários problemas e regista as conclusões, parciais, relativas a cada problema.

Na fase de interpretação são estabelecidas as conjecturas que servem de ponto de partida à investigação. É a partir destas conjecturas que se desencadeia uma sucessão de processos onde se inclui a interpretação, a reformulação de conjecturas, a confirmação de resultados, até ao registo de uma conclusão final. É um processo semelhante ao de conjecturar, experimentar e concluir (Ponte et al., 1999a). No entanto para a Marta, a fase final é encarada como o solucionar do problema, sendo que a sua investigação é caracterizada por um solucionar de vários problemas (Allal, 1986), para os quais existem várias conclusões parciais.

A questão da generalização é assumida pela Marta como importante no processo investigativo, no entanto, a actividade investigativa é dominada pela realização de conjecturas, experiências e conclusões, onde raramente se verifica a generalização. Demonstrou várias dificuldades em generalizar e quando o faz, a aluna mostra-se bastante consciente das limitações das suas generalizações. A Marta salienta que a generalização é possível para os exemplos investigados. As generalizações surgem como a forma de solucionar os vários problemas parciais, que contribuem para a concretização do seu trabalho. Embora realize experiências que têm por objectivo a confirmação de conclusões, outras procuram encontrar novas vertentes de investigação.

Na investigação, também surgem dificuldades que estão relacionadas com alguns conhecimentos matemáticos. Geralmente, são definições ou caracterizações de conceitos, mais notório nas actividades de geometria. Durante o desenvolvimento, aparecem as interacções como uma forma de ultrapassar estas dificuldades. Nas diferentes actividades, as dificuldades foram ultrapassadas através de sucessivas interacções, estabelecidas comigo ou com os outros alunos (César, 1997). No desencadear deste processo, o ultrapassar de dificuldades foi feito pela tradução da tarefa por outras palavras, ou pela tradução de alguns conceitos em particular. As interacções são fundamentais para a continuidade da investigação, permitem aferir o seu trabalho com o realizado pelos seus pares, identificando os erros (Abrecht, 1991; Hadji, 1994), aferindo a profundidade atingida e questionando os caminhos seguidos. A Marta reconhece este valor das interacções no processo investigativo, como uma forma de orientação do trabalho.

A validação do trabalho realizado é efectuada durante o processo de experimentação, através do confronto com as investigações dos seus colegas (Werstch, 1991; Jorro, 2000). Mas, a aluna também me solicitou para confirmar, fornecer contra-exemplos ou dar indicações do caminho a seguir (Trunstall & Gipps, 1996).

É identificável uma regulação das aprendizagens (Perrenoud, 1988, 1999) de forma diferenciada relativamente aos resultados parciais explorados. As experiências seguintes estão dependentes de uma avaliação dos resultados atingidos. Avalia em dado momento aquilo que realizou e o que ainda poderá concretizar.

Na auto-avaliação do trabalho realizado foi fundamental a realização da reflexão escrita sobre o trabalho desenvolvido. É na reflexão escrita que a aluna auto-avalia o seu trabalho e que descreve os erros e as dificuldades com que se deparou na concretização.

A aluna destaca dois papéis para os erros na investigação, o ensinar e o orientar. A orientação que advém dos erros serve principalmente para “conduzir a investigação no bom caminho” (Hadji, 1994). Para a aluna, a investigação permite esclarecer as dúvidas surgidas durante o processo e os conhecimentos emergentes, o que vai no sentido de reforçar as aprendizagens (Serrazina, 1995). O erro é tido como um factor de aprendizagem e um orientador do caminho a seguir. Os erros, integrados no processo de aprendizagem, não podem ser encarados através do aspecto penalizador mas sim como uma virtude que pode ser aproveitada pelo aluno para aprender (Black & Wiliam, 1998; Perrenoud, 1999) que um determinado conteúdo não pode ser aplicado numa dada situação ou que aquele caminho não é o ideal. Os erros que foram identificados situam-se ao nível da linguagem matemática, do conhecimento de definições e das propriedades matemáticas ou das competências de comunicação, e ainda do reconhecimento do solicitado nas propostas de investigação.

No relatório escrito, a aluna escreve as conclusões e os resultados encontrados nas diferentes investigações matemáticas. Sem realizar um balanço final do trabalho realizado nem mostrar os problemas que ocorreram durante o seu desenvolvimento, a Marta apresenta uma sucessão de conclusões que contribuem para a construção de uma visão global da sua investigação.

A sua concepção sobre as investigações matemáticas foi evoluindo ao longo do ano lectivo. A profundidade das reflexões, o carácter auto-avaliativo e o registo de conclusões foi sendo gradualmente melhorado com a continuidade da realização de trabalhos de teor investigativo. A Marta começou a preocupar-se com questões relacionadas com a comunicação matemática, a dar destaque aos erros e à forma como os ultrapassou, onde as interacções desempenharam um importante papel na orientação do trabalho (Nunziati, 1990; Pardala, 1997). Estas características foram, progressivamente, permitindo-lhe uma maior reflexão sobre as suas aprendizagens. Embora, sempre muito pegada ao que aprendeu e ao que concluiu, também passou a valorizar o “como, para quê, e porquê”.

CAPÍTULO VIII

A RITA

Apresentação

A Rita é uma rapariga de quinze anos, morena de cabelos castanhos, compridos e lisos e olhos da mesma cor. Pode ser classificada de “boa aluna”, tendo em conta as classificações que obteve a Matemática e no seu percurso escolar, quer no presente ano lectivo, no nível dezoito, quer nos anteriores, no nível cinco. Esta característica é facilmente replicada para as outras disciplinas. Do ponto de vista dos outros alunos é a melhor aluna da turma. A Rita tem facilidade de comunicação escrita e oral, expressa os seus raciocínios de forma clara e com uma linguagem acessível, embora conversadora, o que a distrai e faz com que se perca nalguns raciocínios mais elaborados. Preocupa-se em colocar questões e em reflectir sobre as respostas que lhe dou com o objectivo de compreender os significados matemáticos. Por também reconhecer o valor educativo das tarefas de investigação no contexto do desenvolvimento do seu processo de aprendizagem, conhecimento que me foi facultado após algumas conversas informais no início do ano lectivo, a Rita foi incluída como caso nesta investigação.

Com expectativas de prosseguimento de estudos superiores na área da farmácia, a Rita considera importante a Matemática para o seu percurso escolar. Referiu esperar que o 10º ano seja mais complicado que o 9º, pelo necessário aprofundamento dos conteúdos.

Perspectivas face ao ensino e à aprendizagem

Ao ser questionada sobre o que é a Matemática, a Rita comparou a Matemática com a Ciências Físico-químicas, CFQ (no momento da entrevista estudava Física em CFQ), destacando-as pela diferença:

Na matemática temos que perceber as fórmulas com que trabalhamos, às vezes até nem usamos números. É apenas raciocínios complicados. Diferente de CFQ, onde aplicamos as fórmulas a problemas.
(Entrevista à Rita, 2/12/2003)

No meu entender, estava relacionado com a abstracção que se pode atribuir à Matemática em detrimento da aplicação. Também, foi curioso o facto de associar a Matemática a muito trabalho e ao mesmo tempo ao lúdico, a uma actividade que se desenvolve com prazer:

... para já é uma das disciplinas que exige mais trabalho. Não um trabalho assim muito do género de Físico-Química ou assim mas é mais de dedicação, de uma pessoa ter de gostar mesmo de fazer muitos exercícios e coisas do género. Pode também ser uma maneira de passar o tempo e pode ser uma actividade [lúdica]. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Embora faça a separação entre a Matemática e as suas aplicações, a Rita sublinhou a importância de aplicar a Matemática à resolução de problemas do dia a dia, contribuindo para desenvolver uma forma de pensar lógica. Para a Rita, ao contrário do que é vulgar os alunos pensarem acerca do trabalho nesta disciplina, não se trata de nada que os alunos tenham de “saber de cór”.

Das aulas espera a continuidade do bom ambiente de trabalho que lhe foi possibilitado pelo professor do ano anterior. No entanto, está expectante relativamente ao aumento de dificuldade que na sua opinião se verifica no 10º ano. Quanto à investigação em Matemática, a Rita remeteu-me para a necessidade de identificar bem o problema que tem para investigar. Ela associa a investigação em Matemática à resolução de problemas e mais concretamente a algumas das fases de resolver problemas segundo Pólya (1966):

Acho que temos de ver bem qual é o problema e ver bem todas as maneiras de o resolver e depois tentar os conhecimentos que a gente tem no problema. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Quando confrontada com a realização de tarefas de investigação na aula e a investigação matemática a associação com os problemas voltou a verificar-se. Acabou por mostrar o seu gosto pela disciplina. Associou as tarefas de investigação à investigação matemática feita pelos matemáticos por duas razões: pela existência de desafios que necessitam de aprofundamento e pelo carácter infinito desta ciência:

Sim, estamos a investigar matemática. De certa forma sim, se bem que para os investigadores são problemas mais avançados. Os nossos são mais básicos, mas é mais ou menos a mesma coisa. Estamos a tentar com os conhecimentos que temos resolver coisas mais complicadas, aprofundar mais, complicar sempre mais. É isso que tem bom a Matemática. Nunca acaba. Há sempre qualquer coisa para ir mais além. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

A Rita considera importante o trabalho de grupo na realização de tarefas de investigação. Na sua opinião, neste tipo de actividade, as diferentes etapas devem ser discutidas entre colegas uma vez que necessitam fazer várias tentativas de resolução, experimentar várias maneiras de resolver. Assim, a metodologia de trabalho de grupo ajudaria a progredir mais rapidamente.

Na opinião da aluna, o professor para cativar os alunos deveria seguir um percurso de desenvolvimento da aula que passaria por: resumo da aula anterior, novos conhecimentos, exercícios e aplicação:

Acho que, primeiro devíamos, antes de uma aula, no início logo da aula, o stor devia fazer sempre o ponto da situação que tínhamos ficado na última aula porque a gente até pode nem se lembrar e é melhor sempre reavivar a memória para a gente ter a noção do que estamos a falar e depois explicar bem a matéria nova e é sempre bom fazer alguns exercícios ou até mesmo as tarefas de investigação, porque assim é uma maneira de a gente saber bem a matéria. Não só sabê-la, mas também saber aplicar. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Este modelo de aula não é compatível com o gosto que aluna manifestou acerca da disciplina e das actividades de investigação, mas acrescentou que seria um modelo a aplicar nas aulas de carácter expositivo. O sucesso do aluno, na opinião da Rita, é um factor que depende de várias variáveis, como a confiança no professor, a sua proximidade aos alunos e também depende da disponibilidade do aluno para aprender e de querer aprender. A Rita concebe a aprendizagem em Matemática como algo que se vai construindo ao longo do tempo e dependente da disposição de cada aluno para o efeito:

Também depende da vontade do aluno. Em princípio todas as pessoas conseguem saber bem e aprender bem as coisas. Só que depende da vontade com que a pessoa está na aula, depende da vontade de nós querermos aprender. E também já parte desde o início, em todo o percurso escolar temos de ficar sempre com as bases de todos os professores, de todas as matérias e de todos os anos. Não pode ser só de um ano que a gente decide a partir de agora vou empenhar-me e depois é mais difícil. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

A aluna foi muito crítica relativamente ao facto de a avaliação se encontrar muito dependente da realização de testes e apresentou como justificações, o tempo e a pressão:

Eu acho que não se deve dar muito valor aos testes. Os testes é sempre, não se pode avaliar tudo aquilo que os alunos sabem só num bocadinho [de tempo]. Numa hora que nós estamos ali e estamos debaixo de pressão a querer fazer tudo, é sempre complicado, não se avalia tudo o que o aluno sabe. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Em alternativa, a aluna propôs uma avaliação realizada de forma diferenciada e dependente de outros factores, como a atitude, o empenho, o esforço, os erros e as dificuldades:

A avaliação deve ser feita com muita atenção. Ver bem. Analisar bem a atitude do aluno, o que ele faz, se ele é empenhado e a atitude dele. Porque um aluno que não consiga, mesmo que tenha alguns exercícios mal no teste e coisas assim, não quer dizer que ele não se esforce. Isso pode ter sido uma falta de atenção ou alguma coisa que não conseguiu compreender bem mesmo depois de estudar, por isso deve ser feito uma análise de tudo mesmo. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Face às características a serem valorizadas pelos professores nas aulas, a aluna evidencia a sua preferência na realização de uma avaliação reguladora. Quanto à classificação, afirmou que os níveis atribuídos não têm grande importância, mas servem para o aluno ir aferindo até que ponto atingiu ou não os objectivos propostos para a disciplina. Do ponto de vista da Rita, a avaliação reguladora não deve ser reduzida à auto-avaliação. A Rita realiza uma auto-avaliação partilhada com os colegas com o objectivo de dominar os conteúdos matemáticos, segundo as suas palavras:

Tento ver antes dos testes. E mesmo sem ser antes dos testes. Ver bem se sei a matéria, saber a matéria até ao ponto de conseguir ensinar alguém. Porque quando chegamos à escola, antes dos testes, ajudamo-nos sempre. Como antes é Filosofia, isso é bom. A gente explicar aos outros, debatermos as ideias, e ver se sei isto, se sei mesmo tudo, se sei mesmo a matéria a tal ponto que dá para aplicar de qualquer maneira, seja num problema ou num exercício daqueles assim mais básico. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Defensora da regulação das aprendizagens através da capacidade de reflexão sobre o seu processo de aprendizagem, mostra interesse, preocupação e capacidade de reorientação:

Saber o que eu sei. Acho que faço o ponto da situação para mim, antes de entrar no teste faço a revisão de toda a matéria. Na altura do exercício vou fazer assim ou se calhar é melhor assim, não. Faço assim que é melhor. Não complica tanto, é mais directo. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Relativamente ao erro, a aluna manifestou preocupação. Ao aperceber-se da existência de erros entra em stress. Este facto complica o seu desempenho a partir desse momento. Para contornar esta situação a aluna define uma estratégia de resolução e só a concretiza quando está praticamente convicta de que é a correcta:

...tento antes de começar a resolver ter sempre a certeza e, mas se isso acontecer [os erros], risco, e tento perceber qual é o erro para não fazer o mesmo, pensar mentalmente o que é que vou fazer tudo! E depois passar tudo para o papel. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Perante as dificuldades, a Rita é uma aluna que consegue questionar, analisar e reflectir sobre o processo desenvolvido:

Normalmente, tento sempre primeiro perceber qual foi o erro e perceber bem para não repetir a mesma coisa e tento ver o que estava mal, comparando com os apontamentos do caderno e comparando com outras coisas que tinha feito antes, parecidas e assim. Saber o que sei, fazer o ponto da situação e encontrar um caminho para sair dali. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

A Rita também se encontra a frequentar o 10º ano pela 1ª vez e considera a sua adaptação muito difícil por factores que são intrínsecos à organização curricular. Para ela, o 10º ano é muito diferente do 9º ano pelo volume de trabalho, relatórios, fichas e outros trabalhos: “as disciplinas exigem trabalhos diariamente e também pelos conteúdos que são mais complicados e diversificados” (Entrevista à Rita, 2/12/2003).

Na Matemática, a Rita salientou que esta disciplina é mais complicada e exige mais trabalho, de tipo continuado e sistemático:

mesmo Matemática é muito mais complicado. Já não posso só estudar para os testes, tinha mesmo de tentar fazer todos os dias um pouco, é muito diferente, temos muito mais trabalho. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Para dar resposta às solicitações dos diferentes trabalhos colocados em Matemática, a Rita recorre aos apontamentos da aula, ao livro, na tentativa de resolver todos os exercícios. Segundo as suas declarações, começa por resolver alguns exercícios onde predomina técnicas repetitivas de cálculo, mas afirma ter necessidade de procurar também problemas para resolver, quando tem tempo e sente que já sabe bem a matéria:

começo sempre por esses que se repetem muitas vezes para saber e ter a certeza que já sei bem como se fazem as coisas. Se me restar algum tempo e achar que sei mesmo a matéria tento sempre procurar aqueles que exigem mais, pensar mais para estar preparada para alguma coisa desse género no teste e aplicar a matéria de outra forma não de uma forma tão directa. (Entrevista à Rita, 2/12/2003)

Actividades de investigação e avaliação

Interpretação da tarefa

A Rita é uma aluna que tem facilidade de compreensão. Este facto facilitou o seu primeiro contacto com as tarefas propostas para investigação. Confrontada com a necessidade de desenvolver uma investigação, a Rita procura, junto do professor ou dos seus colegas, o esclarecimento do significado de alguns termos ou das características e definições que fazem parte do enunciado. Os esclarecimentos solicitados podem estar relacionados com conhecimentos matemáticos ou competências de comunicação.

Ao nível da comunicação matemática, na tarefa *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, a aluna procurou esclarecer junto dos colegas onde deveria marcar os pontos médios dos quadriláteros. Não verificou a percepção de que os pontos médios do quadrilátero são os pontos médios dos lados do quadrilátero:

Para um ou vários quadriláteros, (...) Segmentos de recta, para cada um dos quadriláteros unir os pontos médios. Lê lá outra vez! Os pontos médios de quê? Dos lados?

Na actividade *Pavimentações*, as dúvidas iniciais foram superadas com a minha ajuda. Relacionavam-se com as características de um polígono regular:

As intervenções do professor que me ajudaram a orientar a actividade de investigação foi o esclarecimento de algumas dúvidas, como: quais são as características de um polígono regular. (Reflexão escrita da Rita, 4/2/2004)

No que diz respeito às competências de comunicação, na procura de coerência entre o que é solicitado pelo professor e aquilo que tem para realizar, na primeira tarefa o termo “conjectura” criou alguma perturbação à Rita e ao seu grupo de trabalho:

Quando tentava compreender bem qual o objectivo do trabalho, o professor se dirigiu directamente para o meu grupo, pois ajudou-me a compreender os verdadeiros objectivos do trabalho e algumas palavras com as quais não estava familiarizada, como “conjectura”. (Reflexão escrita da Rita, 12/12/2003)

Por outro lado, na investigação *Zeros de uma função polinomial*, existiu uma dificuldade de interpretação. Esta situou-se na forma aberta como foi colocada a questão: “o que temos de fazer? É necessário entregar uma folha no fim?” Nesta tarefa, a intervenção do Tiago O. desencadeou uma reacção na Rita que a levou de imediato a estabelecer uma conjectura acerca do número de zeros de uma função de grau n . Ele relacionou a actividade proposta com o estudo realizado a propósito da função afim, afirmando que do 1º grau só poderia ter um zero. Após a ligação estabelecida por este aluno, para a Rita foi fácil estabelecer a ancoragem com o que tinha sido estudado anteriormente e a partir daí delinear a sua exploração. Tal situação permite-me afirmar que a Rita estabelece a ancoragem entre as propostas de trabalho e as explorações realizadas noutras aulas.

Já na quarta tarefa, segundo a Rita, a existência de sugestões na proposta orientou o trabalho inicial não surgindo assim dificuldades à partida:

As sugestões na ficha entregue pelo professor foram fundamentais para conseguir encaminhar o meu trabalho. (Reflexão escrita da Rita, 27/4/2004)

A dependência de uma boa interpretação mantém-se ao longo de toda a investigação. A Rita, durante a investigação do polígono que se obtém unindo os pontos médios de um quadrilátero, referiu várias vezes questões relacionadas com os pontos médios:

Rita: Estão a usar a equação do ponto médio?

Tiago O.: Não é preciso a equação, não temos X, não são necessárias condições, não temos coordenadas.

Rita: Não temos coordenadas. Mas para chegar ao ponto médio são necessárias coordenadas.

Tiago O.: Pontos médios e depois unir. Ver o que se obtém com a união dos pontos.

Ou

Olha lá para aqui. Com uma diagonal de um quadrado, como vamos dizer isto. A diagonal é paralela ou perpendicular ao polígono construído pela união dos pontos médios. Estes pontos médios!

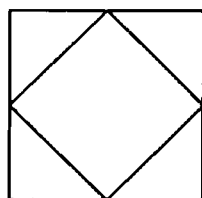
Também em *Pavimentações* se verifica a dependência da interpretação inicial, nomeadamente a preocupação com as características de um polígono regular, mantém-se ao longo da investigação: “O trapézio não é regular? O quadrado, o triângulo e losango são!” Nas outras actividades, também se nota a influência da interpretação inicial na concretização da investigação, acerca da quarta tarefa:

O gráfico parábola? Não. Função cúbica: o que é isso? Não é uma função quadrática pois estas são sempre parábolas.

Desenvolvimento da tarefa

A Rita é uma aluna organizada na actividade de investigação e exploração de uma dada tarefa. A exploração de qualquer tarefa de investigação matemática é feita tendo consciência, na sua opinião, de que a actividade investigativa deve integrar três etapas fundamentais: conjecturas, experiências e conclusões.

Na primeira tarefa, a Rita começa a exploração com a representação de um quadrado. Para o qual estabelece uma conjectura:



Com a união dos pontos médios de um quadrado obtém-se outro quadrado. (Relatório escrito da Rita, 12/12/2003)

Após alguns minutos de dúvidas acerca da marcação dos pontos médios, experimenta outros quadriláteros e refaz a sua conjectura. Estabelece uma conjectura para cada quadrilátero que experimenta: o quadrado, o losango e dois trapézios. E coloca no final uma conjectura globalizante: “com a união dos pontos médios de um quadrilátero obtém-se um _____?” Este espaço por preencher indica que existiu a primeira dificuldade em estabelecer a conjectura da união dos pontos médios de um quadrilátero. Mais tarde, percebi que esta dificuldade está relacionada com o desconhecimento da classificação dos quadriláteros. A Rita resolveu esta dificuldade ignorando-a. Pois, nas figuras incluídas no relatório escrito não se encontra a conclusão globalizante. Podemos verificar a inclusão de um quadrado, de um losango, um trapézio escaleno e um trapézio equilátero, com as respectivas conjecturas, as experiências realizadas e as conclusões.

Na gravação áudio, vislumbra-se em pormenor a dificuldade que existiu em marcar os pontos médios na primeira tarefa:

Rita: Unindo os pontos médios. Como? É dividir o lado em 2? Não temos X, nem Y, não dá para usar as equações.

Tiago O.: Usar a equação da recta não dá! Não pode ser porque não temos referência. Deve ser a meio para todos!

Rita: Está uma coisa muito esquisita!

Após esta dificuldade, que foi ultrapassada com o auxílio dos colegas, explorou uma sucessão das três conjecturas, já referidas, relativas ao quadrado, losango e trapézios (equilátero e escaleno). Depois passou a explorar apenas estes quadriláteros através de um percurso que incluiu as sugestões dadas na proposta de investigação. Relações entre perímetros e áreas e outros comprimentos.

Na mesma investigação, mas na exploração das sugestões, teve dificuldade na exploração daquela que relacionava o perímetro e os comprimentos das diagonais, *qual a relação entre o perímetro do polígono obtido e a soma dos comprimentos das diagonais do quadrilátero inicial*. A Rita mostrou-se atrapalhada, não conseguindo estabelecer uma conjectura e efectuou algumas experiências, mas sem sucesso:

Qual é a relação? Deve ser, por exemplo, fazer a diagonal e comparar. Fazer a diagonal e dizer que a diagonal é paralela ou não aos lados do polígono.

A realização de muitas experiências, só por si, pode causar algumas dificuldades. Por exemplo nas *Pavimentações*, também a exploração foi feita de forma sequencial. A partir dos polígonos apresentados no AGD, não realizou conjecturas explícitas, mas faz várias experiências sem atingir grandes conclusões. Acaba por concluir que existem pavimentações regulares com triângulos equiláteros, com quadrados e com hexágonos, depois da minha intervenção. Vejamos, enquanto a Rita explorava vários polígonos sem concretizar a conjectura para os polígonos regulares:

Rita: Aí dá o quê? Põe o quadrado ali, dá para colocar outro quadrado.

Sara: Em cima do quadrado?

Rita: e depois põe na vertical. Dá mais alguma coisa? Experimenta isto na vertical!

Sara: O azul em cima do verde?

Rita: Vê-lá se cabe o castanho, parece um puzzle.

Eu (após a verificação de que as alunas usavam todas as figuras disponíveis no AGD): Comecem por procurar os polígonos regulares que pavimentam!

No seu relatório final do trabalho, a Rita apresenta as pavimentações com polígonos regulares e outras: triângulos isósceles, com trapézios, com paralelogramos e com triângulos escalenos. Mas em jeito de conclusão, apresenta as pavimentações com polígonos regulares separadas das pavimentações com polígonos irregulares e afirma que apenas existem três pavimentações com polígonos regulares. Apresenta, sem justificação, o pentágono como contra-exemplo à conjectura, não registada, de que todos os polígonos regulares dão origem a pavimentações regulares.

Na terceira tarefa, sem sugestões de exploração, a actividade caracterizou-se pela experimentação de muitos exemplos e contra-exemplos. No momento em que a Rita percebe que o objectivo é a busca de uma relação entre o número de zeros e o grau, estabelece uma conjectura: “grau n , no máximo n zeros”. Mas, a actividade de exploração inicia-se com a experimentação de funções do primeiro grau: $Y = 3X$, $Y = 2X + 0$ e $Y = X$. Na sequência regista as conclusões e esboça os gráficos no relatório escrito:

Olha lá este é o b ! $+0$, se não está lá nada o b é zero. Queres ver outro exemplo? Para ver os zeros, vamos à intersecção com o X .

Depois explora as funções $Y = X^2 + 2$ e $Y = X^2 + 2X$, esboçando os gráficos e registando as conclusões acerca da não existência de zeros no primeiro caso e sobre a existência de 2 zeros no segundo caso. O que a deixou incomodada, pois a sua conjectura é que 2º grau tinha 2 zeros. A exploração prossegue demoradamente no 2º grau, em busca dos valores de a , b e c que na expressão $Y = aX^2 + bX + c$ conduzissem a um determinado número de zeros. A Rita sentiu dificuldade em estabelecer uma conclusão sobre o número de zeros de uma função quadrática. Uma vez que ao explorar expressões de 2º grau obtinha, quase ocasionalmente, um número de zeros diferente daquilo que a sua intuição indicava, ou seja 2 zeros:

Rita: temos um termo do 2º grau, com ou sem algarismo a multiplicar, e tem apenas um zero. O zero é na origem! É sempre na origem. Mas quando acrescentamos um termo umas vezes dá um zero e noutras vezes não tem zeros.

Após me ter solicitado, encaminhei-a para o estabelecimento de conjecturas que incluíssem uma relação entre os parâmetros a , b e c na expressão $Y = aX^2 + bX + c$.

No final a justificação da veracidade da conjectura é feita por intuição gráfica, dado que o número de experimentações com grau superior a dois não permitia a generalização.

Na última tarefa, *investigação com funções cúbicas*, a Rita começa por estabelecer a seguinte conjectura:

O gráfico não pode ser de uma função quadrática pois estas funções são sempre parábolas. O gráfico pode ser uma função cúbica pois tem o aspecto de uma função cúbica, com curvas várias, não tendo um aspecto definido. (Relatório escrito da Rita, 27/4/2004)

Depois, explora as sugestões dadas na proposta de investigação e no final preocupa-se em discutir a influência dos diferentes parâmetros a , b , c e d no gráfico de $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$, sem rebater a sua conjectura inicial. Foi pena não ter feito a discussão do gráfico representar ou não uma função cúbica, uma vez que estudou a influência que alguns parâmetros e concluiu acerca de alguns aspectos gerais dos gráficos. Vejamos as dificuldades sentidas ao estudar a influência do parâmetro d na expressão $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$:

Rita: Aqui d é positivo e aqui é negativo. A curva passou no positivo, e ali passou no negativo.

Professor: O que afirmar acerca do d ?

Rita: quanto maior é o valor, mais acentuado fica e sobe! $+3$, fica mais acima.

Também se notou a existência de dificuldade em interpretar os resultados obtidos na calculadora, o valor influenciava o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas. Mas, quando conjugado com a alteração dos valores de b ou c as alterações eram ainda maiores. Em particular, nesta tarefa sobre as funções cúbicas e acerca do gráfico visualizado na calculadora gráfica:

Rita: Aqui é positivo e aqui é negativo.

Eu: O que é que aconteceu?

Rita: Aqui a curva passou no positivo e ali no negativo.

Eu: Mas qual é diferença nos gráficos, nas expressões, nos pontos de intersecção com os eixos? Pensa um bocadinho!

A Rita, perante este tipo de dificuldade, solicitava-me várias vezes para a ultrapassar. Eu percebi que as dificuldades eram motivadas por um afastamento da questão inicial dada para investigação e pelo não registo das conclusões parciais que ia obtendo. Nestes casos, optei por dar indicações com a linguagem que já encontrava disponível no enunciado de forma a não orientar demasiado. (Diário de bordo, 27/4/2001)

Para além de ultrapassar as dificuldades recorrendo às minhas indicações, existem outras formas que são usadas pela Rita para o fazer. Por exemplo, na procura de reforço para as suas intuições, a Rita estabelece interações com os colegas. A maioria das vezes apenas busca um reforço ao que intui, o que significa dizer que procura a confirmação de que existe mais alguém a pensar como ela, por exemplo e a propósito da primeira tarefa:

Pontos médios de lados consecutivos, achas que estes lados são iguais.
Não os achas mais pequenos?

Ou, por exemplo na segunda tarefa:

Sara: Na diagonal do quadrilátero inicial, eu não percebo isto! É a diagonal do trapézio, vamos fazer o trapézio.

Rita: Este é um paralelogramo! Será que a partir de paralelogramos só se podem obter paralelogramos?

Sara: Eu tenho um quadrado!

Rita: A mim não me deu, olha aqui. Dá paralelogramo. Se fizeres assim.

A Rita mostrou-se consciente da necessidade de recorrer ao professor e aos seus colegas para ultrapassar, no momento da reflexão final sobre a tarefa:

As dificuldades iniciais foram superadas juntamente com o grupo, às vezes com a ajuda do professor, e conseguimos desenvolver os métodos de investigação e alterar o comportamento do grupo. (Reflexão escrita da Rita, 12/12/2003)

Noutra situação, em *Pavimentações*, também referiu a importância do trabalho de grupo como forma de ultrapassar dificuldades nas actividades de investigação:

o debate das ideias e conhecimentos já adquiridos e o contributo de cada um com um polígono ou outro de que se ia lembrando, para que pudéssemos verificar se era possível pavimentar com o mesmo, quer através de desenhos, quer através dos endereços da Internet ou com os polígonos fornecidos pelo professor [polidrons]. (Reflexão escrita Rita, 4/2/2004)

Acerca do erro, a Rita entende-o como parte integrante das investigações matemáticas. Não os dissocia da actividade de investigação em que se envolve. Considera-os naturais e na sua opinião os mesmos não afectam o resultado final, uma vez que, mais tarde ou mais cedo, serão detectados:

Penso que não cometi nenhum erro que tivesse afectado o resultado do meu trabalho. Chamando o professor ou perguntando aos meus colegas, acabo por descobrir os erros. (Reflexão escrita da Rita, 27/4/2004)

No caso da Rita, os erros orientam a sua investigação para o caminho correcto. Ao aperceber-se deles, ela procura encontrar justificações ou esclarecimentos para o sucedido de forma a reconduzir a sua investigação no bom caminho, naquele que foi delineado. Ao contrário do que afirmou na entrevista no início do ano lectivo, perante os erros não manifesta qualquer tipo de atrapalhação, nem incómodo. Perante a descoberta de um erro, a Rita reorienta o seu trabalho instantaneamente. Veja-se alguns exemplos:

[Na Primeira tarefa, na comparação entre a diagonal do quadrilátero inicial e os lados do polígono obtido]

Rita: E aqui, a diagonal é perpendicular ou paralela.

Sara: Espera aí! Isto não é perpendicular nem paralela.

Rita: É verdade! São concorrentes, têm um ponto em comum mas não são perpendiculares. Mas a outra é paralela?

Este exemplo mostra que o erro cometido pela aluna estava relacionado com o não reconhecimento de que as linhas traçadas eram concorrentes, ou seja, a aluna confundia os conceitos matemáticos de paralelismo e perpendicularidade. Mas, também na terceira tarefa se identificaram erros relacionados com conceitos matemáticos. Neste caso, mais propriamente relacionados com a linguagem matemática:

Rita: Estou a inventar uma expressão para o primeiro grau e confirmei na máquina o seu gráfico. Primeiro grau porque o X não está elevado a nada, então ponho elevado a zero. Na máquina dá-me uma recta horizontal!

Tiago O.: Está elevado a 1 e não a zero. Primeiro grau é elevado a 1.

Rita: Tá bem...

Na quarta tarefa, *Uma investigação com funções cúbicas*, foram identificados erros que tinham como origem a deficiente utilização da janela de visualização da calculadora gráfica, perante o que era solicitado na proposta de investigação. Quando experimentava uma expressão do terceiro grau, a Rita afirmava que o resultado da representação gráfica era uma recta. O que era falso, a janela de visualização da calculadora gráfica é que não era a adequada para aquela expressão:

Rita: Fica uma recta! Com valores muito grandes fica uma recta.

Eu: Tens a certeza?

Rita: Se o domínio e o contradomínio é \mathbb{R} .

Eu: Acerca do domínio e contradomínio tens razão. Mas verifica melhor, talvez com outra janela de visualização.

Auto-avaliação do trabalho

A regulação das aprendizagens é uma meta a atingir pela Rita. A aluna não pretende apenas realizar mais um trabalho. Procura questionar a forma como executa a investigação, os conteúdos que usa e no final reflecte sobre o trabalho desenvolvido, nomeadamente, como o desenvolveu e para quê. Na reflexão, a aluna executa uma avaliação final do trabalho realizado e questiona o contributo de cada investigação para o enriquecimento da sua aprendizagem.

A Rita é uma aluna muito preocupada com o seu trabalho, pelo que afere constantemente a sua evolução na investigação com aquilo que os seus colegas vão executando. Esta característica pessoal permite-lhe avaliar a sua actividade de investigação confrontando-a. No entanto, devido à sua facilidade de apreensão, a Rita usa esse confronto para seguir em frente e aprofundar a sua investigação. Na terceira tarefa, *Zeros de uma função polinomial*, verifica-se que a elaboração de significado é feita através do confronto de ideias com os outros alunos:

Rita: 1º grau tem um zero, só pode ter um zero.

Sara: E se for 0X?

Rita: A recta é o eixo do X, e agora vai à procura dos zeros.

Sara: Tem todos os zeros? Infinitos?

Tiago: Vai ter como zeros todos os números do eixo do X

Rita: É do 1º grau? 0X?

Outro dos processos usados pela Rita para avaliar a concretização do seu trabalho é a experimentação. Como é uma aluna que segue um processo linear de investigação (conjecturas, experiências e conclusões) antes do estabelecimento de conjecturas realiza algumas experiências iniciais. Por vezes, não se tratam de experiências mas sim de reflexões pessoais acerca da proposta que lhe é colocada para investigar. Ou seja, uma avaliação do que é solicitado face aos seus conhecimentos. Na primeira tarefa, na fase em que lê a proposta de investigação, a Rita auto-questiona-se sobre a investigação a realizar:

Ver o que se obtém pela união dos pontos médios. Polígonos são todos! Ver a sua forma? Deve ser alguma conclusão do género e isso é a conjectura, depois tenho de explicar a relação.

Ainda na auto-avaliação, outro processo usado é a busca de contra-exemplos. Na segunda tarefa, *Pavimentações*, é de notar que a redacção da conclusão globalizante acerca dos polígonos regulares que formam uma pavimentação regular foi feita depois de encontrar o pentágono regular que não dá origem a uma pavimentação regular:

Rita: O trapézio não é regular. O quadrado, o triângulo e o losango são?

João: O losango não é regular.

Rita: Pois, então temos o quadrado, o triângulo e o pentágono.

Sara: Pentágono? Sim, sim vês!

Rita: Esse não é regular. O regular? Stor, Stor, tem os polidrons?

A Rita, depois da exploração dos pentágonos com os polidrons, avalia a sua investigação, refaz as suas conjecturas e acrescenta justificações e generalizações ao seu trabalho:

Os polígonos regulares que pavimentam são os hexágonos, os quadrados e os triângulos equiláteros. O pentágono não dá. Tem tudo a ver com os ângulos que unem no vértice, a soma tem de dar 360° .

Ao realizar uma avaliação sobre o trabalho desenvolvido, a Rita salienta a importância da proposta de trabalho, como condicionante da realização de uma boa exploração. A existência ou não de sugestões é outro aspecto apontado no balanço sobre a investigação. Outros factores referidos são o tempo disponibilizado para a realização da investigação, as interacções estabelecidas comigo e no seio do grupo de trabalho. Também é de acrescentar que a avaliação que a aluna faz do trabalho que desenvolveu é consciente e verdadeira.

Na reflexão escrita sobre a primeira tarefa *Unindo os pontos médios de um quadrilátero*, a Rita segue as questões colocadas para reflexão no guião. Começa por se referir às intervenções do professor, depois às interacções com os colegas, omite os erros e faz um balanço do trabalho realizado. O destaque na forma de balanço, na primeira reflexão escrita, vai para a realização de actividades de investigação em trabalho de grupo e para necessidade de ter mais tempo para investigar. Acerca das intervenções do professor, o destaque vai para as dirigidas ao seu grupo de trabalho:

As intervenções do professor que mais me orientaram foram aquelas em que o professor se dirigiu directamente para o meu grupo.
(Reflexão escrita da Rita, 12/12/2003)

As vantagens do trabalho de grupo, neste tipo de actividade, na opinião da Rita situam-se ao nível da discussão que surge no seio do grupo e na comparação de resultados que acontece ao longo do desenvolvimento da actividade de investigação. Na realidade o que pretende é uma avaliação do seu trabalho, perante os outros:

Com os meus colegas, pude discutir sobre o melhor caminho a tomar e conseguimos adoptar um caminho em que cada um utilizava os seus próprios exemplos, mas em que, no final, conseguíamos comparar

conclusões. Ao discutirmos e compararmos os resultados, conseguimos refazer algumas conjecturas. (Reflexão escrita da Rita, 12/12/2003)

Embora reconhecendo as dificuldades iniciais na definição de um percurso de investigação e na organização do grupo, salienta a importância do tempo para aprofundar a sua exploração:

A investigação não evoluiu tanto como esperávamos, por falta de tempo. Principalmente devido ao tempo perdido no início ao tentar perceber bem qual era o objectivo do trabalho. (Reflexão escrita da Rita, 12/12/2003)

Na segunda tarefa, *Pavimentações*, a Rita inclui as intervenções do professor, as intervenções dos colegas em trabalho de grupo, refere as dificuldades e limitações da sua investigação e faz um balanço do trabalho realizado. À semelhança do que aconteceu na primeira tarefa continua a ser grande a importância dada ao trabalho de grupo na metodologia de investigações matemáticas.

A Rita salienta o facto de não dominar na sua plenitude os conhecimentos que se relacionam com a Geometria, em particular, os ângulos e os quadriláteros para justificar a pouca exploração efectuada. É uma clara auto-avaliação do trabalho realizado:

Devia ter investigado outras pavimentações com polígonos diferentes, combinando-os até, mas tenho dificuldade em quadriláteros e ângulos. Isto tornou a minha investigação muito limitada. (Reflexão escrita da Rita, 4/2/2004)

Na terceira tarefa, *Zeros de uma função polinomial*, a Rita salienta as intervenções do professor para possibilitar a continuação do trabalho de investigação, nomeadamente quando surgem dificuldades:

Foi importante quando o professor dava novos exemplos [contra-exemplos] que vinham contrariar certas conjecturas que tínhamos já tomado como certas. Isto, fez-me perceber que para chegar a qualquer conclusão é necessário investigar bastante e não achar que todos os casos obedecem à mesma regra, a matemática é algo muito complicado que exige muita paciência e investigação. (Reflexão escrita da Rita, 31/3/2004)

Na investigação do número de zeros, a Rita, também reflecte sobre os erros que cometeu. Inclusive apresenta a necessidade de encontrar uma resposta como um motivo para que surjam:

Ao longo do desenvolvimento da tarefa, cometi o erro de pensar que, por uma ou duas vezes, o número de zeros coincidir com a minha conjectura inicial. O que era errado. Como a ansiedade de encontrar uma resposta para o problema era grande, entusiasmava-me demasiado. (Reflexão escrita da Rita, 25/3/2004)

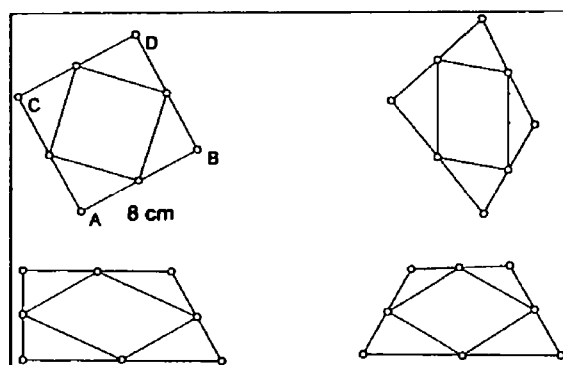
Na quarta tarefa, *Uma investigação com funções cúbicas*, a Rita destaca o facto de existirem sugestões na proposta de trabalho. Este facto, no seu entender, motivou que a exploração se concretizasse de forma individualizada e sequencial, favorecendo as conclusões:

Nenhuma intervenção de um colega me ajudou a orientar, pois desta vez o trabalho foi mais individual. E pude concluir melhor. As sugestões apresentadas na ficha foram fundamentais. (Reflexão escrita da Rita, 27/4/2004)

No entanto, realça a importância da quarta investigação no seu “aperfeiçoamento” com calculadora gráfica e no trabalho com funções em geral. A questão do tempo também volta a ser referida como uma dificuldade à concretização de uma maior profundidade na exploração.

É de notar que em todas as reflexões escritas se nota um sentido de auto-avaliação bastante apurado. Isto é, a Rita estabelece uma ligação muito forte entre aquilo que era esperado que concretizasse e aquilo que foi capaz de concretizar. Auto-avalia-se. Como é detentora desta capacidade, é capaz de analisar as intervenções do professor, dos colegas e discernir as vantagens que as mesmas tiveram na concretização do seu trabalho.

No relatório escrito, a Rita inclui muitas figuras. Tem por objectivo exemplificar perante o leitor o seu raciocínio ou os caminhos que seguiu no estabelecimento de conjecturas e mais tarde na sua prova e generalização. Estas figuras também servem para a ajudar na busca de argumentos que provam ou refutam uma dada conjectura:



(Relatório escrito da Rita, 12/12/2003)

Os resultados da exploração efectuada na primeira tarefa são apresentados como se se tratassem de condições para a veracidade das conjecturas estabelecidas, por exemplo:

Para que, unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrado se obtenha um rectângulo, o quadrilátero deve ser um losango. (Relatório da Rita, 12/12/2003)

Nas pavimentações regulares, a Rita apresentou uma pavimentação com triângulos equiláteros, uma com quadrados e uma com hexágonos. Nas pavimentações com polígonos irregulares apresentou pavimentações com triângulos isósceles, trapézios, paralelogramos, triângulos escalenos, rectângulos e losangos. Acompanha-as, a todas, com figuras, mas não justifica a existência de apenas três pavimentações regulares (anexo VIII).

Na actividade sobre o número de zeros de uma função polinomial, a Rita estabeleceu as suas conjecturas logo de início, mas não as registou no relatório. As conjecturas foram aparecendo durante o desenvolvimento, a par da investigação matemática do assunto, revestindo o carácter simultâneo de conjecturas e conclusões. A aluna, desta forma, experimentava e concluía ao sabor da exploração.

Na última tarefa, *Uma investigação com funções cúbicas*, a Rita seguiu as sugestões dadas na proposta de trabalho e depois de organizar todos os itens que se propunham para estudo, resolveu estudar a influência dos diferentes parâmetros da expressão $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$. No relatório, a exploração das sugestões dadas é acompanhada de gráficos exemplificativos. No registo das conclusões do estudo sobre a influência dos parâmetros, também, são usados gráficos para mostrar ou exemplificar aquilo que a Rita quer argumentar.

É de notar que os relatórios da Rita foram evoluindo ao longo do ano lectivo. A Rita, no início, apresentava as suas conjecturas e as experiências realizadas. Gradualmente, passou a verificar-se uma maior preocupação com o registo de conclusões. Para além das conjecturas e das experiências realizada, dos últimos relatórios fazem parte as conclusões globalizantes e várias tentativas de generalização do que foi investigado. Chegando mesmo, a conseguir generalizar a exploração que efectuou para investigar a influência de alguns parâmetros nas expressões das funções quadráticas e cúbicas.

No quadro seguinte são sintetizados os principais aspectos que são incluídos nos relatórios escritos da Rita:

Quadro 7: Características incluídas nos relatórios escritos da Rita

Primeira tarefa	Figuras, que são esquemas exemplificativos do raciocínio seguido; Conjecturas sobre a união dos pontos médios; Condições que generalizam as conjecturas acompanhadas de figuras.
Segunda tarefa	Apresenta conclusões gerais sobre os polígonos regulares que pavimentam acompanhadas de figuras exemplificativas; Exemplos de polígonos irregulares que também pavimentam.
Terceira tarefa	Conjecturas acerca do número de zeros para o 1º, 2º e 3º graus. Vários gráficos que mostram a exploração efectuada com os diversos graus. Conclusões acerca do 1º e 2º graus e generalização sem prova de alguns resultados.
Quarta tarefa	Apresentação de 2 gráficos de funções cúbicas e exploração das sugestões dadas na proposta. Exploração da influência dos diversos parâmetros da expressão $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$ e respectivo registo de conclusões.

Síntese do capítulo

A Rita é uma aluna que tem um bom relacionamento com a Matemática. Gosta da disciplina e sempre obteve boas classificações. É uma aluna comunicativa e tem facilidade de expressão oral e escrita, o que lhe dá segurança para poder questionar e intervir nas aulas, mesmo quando não é solicitada. Entende as investigações

matemáticas como um desafio que lhe permite colocar-se no papel de um matemático, que explora diferentes abordagens e direcções.

As investigações matemáticas realizadas pela Rita caracterizam-se por se desenvolverem de uma forma linear. Isto é, a Rita organiza a exploração seguindo um processo que inclui o estabelecimento de conjecturas, a realização de experiências e o registo de conclusões (Ponte et al., 1999a). Também é de notar, que quando existem sugestões, a aluna segue-as como se fosse obrigatório fazê-lo e atribui-lhes grande significado para a resposta ao problema inicial. A aluna tem a preocupação de estabelecer conjecturas com vista à orientação de um percurso de investigação, mas após a exploração não as confronta com a sua conjectura inicial. O destaque, nas três etapas (conjecturas, experiências e conclusões), vai claramente, conforme os dados o podem confirmar, para a realização de muitas experiências, explorando a actividade em muitas direcções, mas em pouca profundidade.

No processo investigativo, a Rita mostrou algumas dificuldades. Na fase inicial da investigação, enquanto procura estabelecer as suas conjecturas, detectei dificuldades relacionadas com o conhecimento de definições matemáticas e outras provocadas pela deficiente interpretação.

“Como prosseguir?” É uma questão que se coloca à Rita não só na fase inicial, mas também, durante a realização de experiências. Na procura de ultrapassar esta dificuldade, faz várias experiências para encontrar contra-exemplos que sirvam como meio de prova ou justificação à aprovação ou refutação da tese. No entanto, em algumas situações acontece que a sua intuição é um obstáculo ao prosseguimento. Como se encontra convencida de que o caminho correcto é o seu, não admite outros sinais que não sejam aqueles que resultem das experiências realizadas por si e raramente aceita as indicações dos seus colegas. É uma aluna difícil de convencer.

Na maioria das vezes, a confirmação da veracidade dos seus resultados advém da realização de muitas experiências, o que conduz à elaboração de significado (Serrazina, 1995) no encontro com várias conclusões parciais que depois procura provar ou generalizar.

Durante a realização de experiências foram detectados outros tipos de dificuldades: dificuldade em interpretar o que vê na calculadora gráfica, o afastamento daquilo que investiga e a não realização de registos escritos parciais. Para que a aluna fosse capaz de prosseguir a sua investigação, tive de intervir no sentido de a reconduzir ao caminho correcto (Allal, 1986). Mas, noutras situações a minha intervenção não foi

necessária. Como a aluna se encontrava a trabalhar em grupo, a intervenção dos outros alunos, mesmo não sendo solicitada pela Rita, possibilitou-lhe o reenaminhamento após a auto-avaliação do trabalho desenvolvido. Também se verificam situações em que a aluna solicitou materiais manipuláveis, que para além de a orientarem na investigação, serviram para provar as suas conjecturas e redigir conclusões. Quando isto se verificou, a aluna estava convencida que encontraria um contra-exemplo, e os materiais foram o apoio para que tal se verificasse (Hadji, 1994).

A Rita perspectiva os erros na sua actividade de investigação de forma natural e sem lhe criarem qualquer tipo de incómodo. Após a reflexão informal sobre o trabalho desenvolvido, refaz o seu trabalho, corrige os erros e restabelece conjecturas, o que lhe permite continuar a experimentar (Abrecht, 1991; Hadji, 1994). Na realização das investigações matemáticas, enquadrando os erros na actividade investigativa como sendo naturais, temporários e orientadores do percurso a seguir, o que não acontecia no início do ano lectivo. Os erros funcionaram como uma orientação e, para ela, são vistos como inevitáveis. No entanto, afirma-se confiante que os detectará mais tarde ou mais sendo. Este aspecto dá-lhe a confiança (Perrenoud, 1999) necessária ao desenvolvimento das suas investigações matemáticas.

Durante as aulas de investigações em que a Rita foi observada é possível identificar que os erros da Rita estão relacionados com o desconhecimento de conceitos matemáticos, o não reconhecimento do que é solicitado ou o não domínio da utilização da calculadora gráfica.

Relativamente à auto-avaliação do trabalho investigativo, a Rita, realiza-a de duas formas distintas: aferição do trabalho realizado e procura de contra-exemplos que refutem a sua tese. Na auto-avaliação do trabalho, a aferição é feita por comparação com o trabalho que está a ser desenvolvido pelos seus colegas, identificando as semelhanças e as diferenças, por confronto directo e discussão de ideias dentro do grupo de trabalho, por realização de muitas e sucessivas experiências e por recurso à reflexão pessoal sobre o que já desenvolveu e como o fez, na tentativa de encontrar eventuais erros (Perrenoud, 1999). Quando recorre à procura de contra-exemplos é porque não está totalmente confiante na sua investigação ou porque é questionada por outros alunos acerca do estabelecimento de determinada conjectura.

Nas reflexões escritas sobre o trabalho desenvolvido, a Rita salienta alguns aspectos que são importantes, para ela, no desenvolvimento de investigações matemáticas. A Rita destaca a importância de realizar investigações matemáticas numa

metodologia de trabalho de grupo. Refere que as interações são um elemento facilitador e uma forma de progredir mais rapidamente na investigação (César, 1995; Vial, 2001).

Também transparece a importância dada à proposta de trabalho, como condicionante da investigação realizada, por conter ou não sugestões e por possibilitar ou não uma boa interpretação do que se pretende investigar.

Na forma escrita, a Rita também se referiu à necessidade de que a realização de investigações matemáticas requer persistência e muito tempo para o poder fazer. A aluna avalia o seu trabalho através de uma reflexão sobre o nível de profundidade que atingiu, passando a incluir os erros como importantes para o prosseguimento da investigação e para o enriquecimento dos seus conhecimentos e capacidades (Davis & Mason, 1989; Pinto, 2003), denotando desta forma um crescimento reflexivo no nível de aprendizagens conseguidas.

Nos relatórios escritos elaborados no final de cada tarefa, a aluna inclui sempre figuras e gráficos que procuram exemplificar o que pretendeu investigar. Também são incluídos vários exemplos de experiências realizadas, como forma de mostrar os avanços e os recuos que existiram na actividade de investigação. Tal facto permite-me dizer que a aluna tem consciência das características que são tidas em conta na realização de uma investigação matemática e da importância que esses registos têm para a concretização de uma auto-avaliação final. No relatório realizado sobre a actividade *Pavimentações* não apresentou uma generalização, segundo a sua auto-avaliação porque não domina na sua plenitude os conhecimentos que se relacionam com Geometria.

Numa apreciação global dos relatórios, também se nota que a aluna tem uma visão da matemática associada à representação gráfica. Esta tradução figurativa daquilo que está a explorar permite-lhe reorientar a investigação através da avaliação rápida do trabalho realizado, o que a ajuda no processo sequencial de realização da sua investigação.

CAPÍTULO IX

CONCLUSÕES

Síntese do estudo

O presente estudo teve por objectivo estudar os processos que os alunos, do ensino secundário, usam como forma de dar resposta às dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos com que se confrontam nas investigações matemáticas. Pretendi conhecer os processos de interpretação, os processos de investigação, as dificuldades, os erros e a sua função no desenvolvimento da actividade, as interacções e os outros recursos que os alunos do ensino secundário utilizam quando se confrontam com a necessidade de desenvolver uma investigação matemática, num contexto de sala de aula. Para contribuir para o conhecimento desta temática enunciei as seguintes questões:

- Qual o tipo de processos que o aluno desenvolve quando se confronta com uma investigação matemática?
- Qual o tipo de recursos que o aluno procura quando sente dificuldades e como os usa?
- Qual a função atribuída aos erros na concretização da tarefa?
- De que modo o aluno reflecte sobre o processo desenvolvido e reorienta o seu trabalho com vista ao sucesso?

Para a concretização deste estudo foi escolhida uma metodologia de natureza qualitativa, por ser um tipo de metodologia adequada à compreensão dos problemas do ensino (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994) e por as suas características (Bogdan & Biklen, 1994) se enquadrarem neste estudo. O design de investigação desenvolvido foi o estudo de caso. Não existiu controle, nem manipulação das causas dos comportamentos dos participantes. O intuito foi compreender esses comportamentos.

Como participantes foram escolhidos quatro alunos, o André, o Lourenço, a Marta e a Rita, de uma turma do 10º ano, no ano lectivo em que foi aplicado pela primeira vez o programa de Matemática – A. Para a escolha dos alunos foram tidos em conta os seguintes critérios: terem facilidade de comunicação; demonstrarem apetência ou capacidade de reflexão desenvolvida; reconhecerem o valor educativo das tarefas de investigação no seu percurso escolar; serem de sexos diferentes; terem estatutos escolares diferentes. Os alunos foram observados e áudio e vídeo gravados em oito

aulas de cinquenta minutos, onde foram desenvolvidas investigações matemáticas. Todas as gravações foram transcritas, por mim, e acerca de cada aluno foram registados os aspectos mais relevantes numa grelha de observação de aula, durante o decorrer das aulas. As transcrições, a grelha de observação de aula, o meu diário de bordo, o relatório final do trabalho de investigação realizado e a reflexão escrita pelos alunos sobre o trabalho desenvolvido constituíram os instrumentos de recolha de dados. Para poder ampliar e caracterizar os aspectos investigados neste estudo, recorri também a uma entrevista semi-estruturada realizada no início da recolha de dados. No diário de bordo registei as minhas intervenções, decisões e reflexões ocorridas durante as actividades. Analisei as reflexões e os relatórios escritos, produzidos individualmente sobre cada investigação, e confrontei-os com os dados recolhidos através dos outros instrumentos. Dos elementos encontrados, surgiu a organização e apresentação deste estudo, onde é dada relevância à descrição detalhada das experiências de aprendizagem realizadas e à actividade que desencadeou nos alunos. O confronto com a fundamentação teórica deu origem à categorização que presidiu à redacção dos estudos de caso, tendo em conta, os recursos mobilizados na interpretação e desenvolvimento, as interacções, os erros, a reflexão e avaliação da actividade.

Através da metodologia descrita, pretendi analisar a concretização de um modelo de avaliação reguladora, que passa por ajustar de forma mais sistemática e individualizada as intervenções do professor e as situações didácticas, de forma a rentabilizar as aprendizagens (Perrenoud, 1999; Ponte, 2003; Santos, 2002; Shepard, 2001). Isto exige que a avaliação usada durante o processo de ensino e aprendizagem seja orientada para a regulação, na assumpção que todos os alunos aprendem, embora de uma forma diferenciada (Perrenoud, 1986; Rafael, 1998). Este modelo pressupõe a recolha de informação sobre os progressos e dificuldades, a interpretação e o diagnóstico dos factores que estão na origem das dificuldades e a adaptação das actividades de ensino e aprendizagem de acordo com a interpretação das informações recolhidas (Allal, 1986; Jorro, 2000; Nunziati, 1990; Perrenoud, 1988).

A escolha da actividade investigativa, advém de pretender possibilitar ao aluno a oportunidade de experimentar processos que, através das interacções com o professor, com os seus colegas e com outros recursos, permitam identificar formas de ultrapassar dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos. O conhecimento dos diversos processos e recursos que os alunos usam na interpretação e na investigação de uma proposta de trabalho facilita a adopção de uma atitude de avaliação reguladora, uma vez que pode

ser melhorada a compreensão das atitudes dos alunos, a interacção e consequentemente a actuação do professor.

A minha inquietude acerca das dificuldades que os alunos sentem no processo de aprendizagem e das consequências que as mesmas têm para o seu percurso escolar, levou-me a reflectir sobre a avaliação em matemática no ensino secundário e a procurar aprofundar os meus conhecimentos acerca da problemática da avaliação formativa.

Apresentação e discussão dos resultados

Processos

As investigações matemáticas constituem uma oportunidade para que os alunos aprendam matemática a fazer matemática (Santos et al., 2002), o que segundo Ponte (2003), pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem capacidades de nível superior e até promoverem novas aprendizagens. O contacto com os métodos investigativos permite a descoberta de relações entre objectos matemáticos conhecidos, o reforço da capacidade de raciocinar logicamente, de formular contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios, de sistematizar, de verificar resultados e de construir demonstrações.

Para Schoenfeld (1991), existem actividades que têm sentido matemático por estarem associadas a determinados tipos de comportamento, onde se inclui, modelar e simbolizar, comunicar, explorar, conjecturar e provar. As investigações matemáticas constituem uma situação de trabalho em aula que envolve tais processos, quer se situem num enquadramento realístico, quer num contexto matemático (Ponte, 2003). Em ambos os contextos, as investigações matemáticas permitem a vivência de processos do pensamento matemático como representar, visualizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar (Dreyfus, 1991), processos que interagem entre si.

Acerca dos alunos estudados nesta investigação, é possível identificar processos diferentes no primeiro confronto com a proposta de uma investigação matemática e no desenvolvimento dessa investigação, mostrando as dificuldades dos alunos ao nível da interpretação e da definição de um percurso de investigação.

Ao nível da interpretação, os alunos usam processos que incluem a realização de leituras sucessivas, o enunciar a proposta por outras palavras, a realização de sucessivas experiências iniciais baseadas nas sugestões incluídas no enunciado da proposta de

trabalho, os avanços e os recuos e a ancoragem da nova proposta naquilo que o aluno já realizou.

Na interpretação, o André, por um lado utiliza um processo caracterizado por ler várias vezes a proposta de investigação e soletrar os termos usados na proposta com vista à sua interiorização, enquanto, por outro lado, traduz por outras palavras o que vai compreendendo. Este processo de interpretação reflecte também o que foi referido pelo aluno acerca do seu confronto com a avaliação sumativa através de testes escritos, em que as suas dificuldades se situam essencialmente ao nível da compreensão das questões colocadas.

Também o Lourenço, na interpretação, utiliza dois processos: a ancoragem e a realização de algumas experiências iniciais baseadas nas sugestões da proposta, quando estas existem. O Lourenço procura desta forma descobrir conhecimentos e estratégias para poder aplicar. Uma vez que associa a investigação matemática à descoberta platónica, procura descobrir a forma de realizar a sua investigação como uma imitação daquilo que já foi realizado por outro.

O confronto do André e do Lourenço com a tarefa de investigação situou-se ao nível do referido por Brousseau (1976), na perspectiva de que o aluno investe conhecimentos anteriores, submete-os a uma revisão, modifica-os, completa-os ou rejeita-os para formar novas concepções. Tal vem igualmente de encontro com a perspectiva de Bishop e Goffree (1986) de que um significado matemático é alcançado ao estabelecer conexões entre uma ideia matemática particular e o restante conhecimento pessoal do aluno. Para estes alunos, a interpretação emerge do enunciar da proposta de investigação. Por outras palavras, da identificação de semelhanças entre a nova proposta de investigação e aquilo que o aluno já domina e do interiorizar pela compreensão dos conceitos referidos na proposta de trabalho.

Já a Marta e a Rita procuram as sugestões e as figuras disponíveis na proposta, para realizarem algumas experiências iniciais com o objectivo de encontrarem um possível percurso de investigação. Quando não as encontram, desenvolvem interações com os seus colegas de grupo de trabalho ou com o professor para poderem delinear uma estratégia de actuação. Este aspecto reforça a importância que as alunas atribuem ao trabalho de grupo na realização de tarefas de investigação. As alunas consideram ser fundamental a cooperação para avançar na investigação matemática.

Embora, nem sempre aconteça, porque a Marta na primeira tarefa também usou a tradução da proposta por outras palavras, as raparigas deste estudo tendem a usar os

processos de interpretação baseados no recurso à experimentação de vários exemplos e na busca de contra-exemplos, tendo como fonte de orientação as sugestões apresentadas, quando existem. Procuram construir uma idealização acerca do que pretendem obter através do recurso à experimentação inicial e confirmam-no quando não encontram contra-exemplos. Esta forma de investigar é congruente com a forma como Vinner (1991) se referiu à aquisição de conhecimentos matemáticos como reforço do conceito imagem. A explicação desta forma de interpretar pode advir da associação que a Rita faz entre as tarefas de investigação e a investigação matemática feita pelos matemáticos. Segundo a Rita, ambos são desafios que necessitam de aprofundamento e têm a possibilidade de prolongamento ao infinito. No entanto, para a aluna, é necessário à partida criar uma imagem do que é necessário fazer. Para a Marta, as investigações são aplicações dos seus conhecimentos à resolução de determinadas situações mais complicadas, o que também explica a procura de compreensão da situação através de uma avaliação inicial pelo objectivo de obter uma orientação para concretização.

No confronto com uma proposta de investigação, cada aluno interpreta à luz das suas concepções, experiências, vivências e conhecimentos, aquilo que terá de desenvolver. Apesar dos alunos participantes neste estudo reconhecerem o valor educativo das tarefas de investigação no seu percurso escolar, têm vivências, experiências e concepções diferentes. Logo, é natural que desenvolvam processos diferentes no primeiro confronto com as investigações matemáticas.

Em síntese, a partir das investigações realizadas pelos alunos envolvidos neste estudo, é possível distinguir os seguintes processos que conduzem à interpretação do enunciado da proposta de uma investigação matemática:

Traduzir: é um processo utilizado pelos alunos para a melhor compreensão da proposta. O traduzir concretiza-se pela emissão de palavras e é identificável por leituras sucessivas da proposta de investigação e o consequente enunciar da proposta por outras palavras, o que conduz à compreensão do trabalho a realizar. O enunciar a proposta por outras palavras pode ser efectuado pelo próprio ou por outrem através do estabelecimento de interacções.

Experimentar inicial: é um processo utilizado pelos alunos que conduz ao estabelecimento de um percurso de investigação. O experimentar caracteriza-se pelo emprego sistemático da experiência de modo a procurar regularidades e assim definir o

percurso a seguir. Nas propostas de investigação com sugestões ou figuras, as primeiras experiências são realizadas tendo por base as sugestões e figuras apresentadas. Caso não existam, o aluno experimenta baseando-se na sua intuição. Noutras situações, a experimentação inicial realiza-se tendo por base os materiais de suporte ou as interações.

Interiorizar: é um processo que se prende com a compreensão do significado de algumas palavras, comentários, resultados ou indicações do texto da proposta de investigação. O aluno lê a proposta, avança e recua várias vezes em torno dum significante que não compreende. Depois de tornar interno o significado, avança sem rodeios. O interiorizar verifica-se através do estabelecimento de interações ou através da pesquisa.

Ancorar: é um processo que relaciona a nova proposta nos conhecimentos adquiridos anteriormente. Ao lançar a âncora nos conhecimentos dominados, o aluno procura contextualizar a sua investigação e assim definir um percurso de exploração. Este processo, de ancoragem, concretiza-se pela identificação de semelhanças entre a nova proposta e aquilo que o aluno já realizou.

No que diz respeito aos processos de desenvolvimento da tarefa, estes alunos, do ensino secundário, também realizam investigações matemáticas de forma não linear, como foi identificado por Brocardo (2002) para o ensino básico. O Lourenço refaz toda a investigação quando se confronta com um obstáculo. Este processo é caracterizado por avanços e recuos, que provocam o refazer de toda a investigação sempre que identifica um dado novo, um caminho sem saída ou um contra-exemplo. O Lourenço recomeça a actividade investigativa avaliando o que entretanto tinha feito, tendo como sistema de referência os seus conhecimentos. Para que o Lourenço assuma a veracidade de uma conclusão são utilizados contra-exemplos, interações ou pesquisa noutros suportes, de forma a atingir a confirmação ou não da sua validade (Hadi, 1994; Perrenoud, 1999). É neste ziguezague que o aluno vai investigando, talvez por ser um aluno persistente e autónomo.

Apesar de, também, serem identificáveis avanços e recuos nos processos usados pelo André no desenvolvimento das suas investigações, este aluno usa um processo em que vai desbravando e atingindo sucessivos níveis de aprofundamento, que se baseiam

nos avanços conseguidos na etapa anterior. No entanto, é de ter em conta o que foi referido por Tunstall & Gipps (1996) acerca da construção do caminho seguinte. Em particular, o André avança através das interacções que vai estabelecendo. Este aluno solicita e necessita, frequentemente, de feedback para prosseguir. É a avaliação que o André faz de cada etapa conseguida, pós feedback, que lhe permite avançar pelo mesmo caminho ou reorientar o seu trabalho.

Mas, também é possível identificar processos que incluem o estabelecimento de conjecturas, a realização de experiências e a redacção de conclusões. A Rita organiza a exploração seguindo um processo linear que inclui estabelecimento de conjecturas, realização de experiências e registo de conclusões. No caso da Rita, é possível afirmar que segue as fases do processo de investigação referido por Ponte et al. (1999a): o reconhecimento da situação, a formulação de questões, a formulação de conjecturas, o seu teste e refinamento, a argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado. Neste paralelo, é de destacar que a aluna preocupa-se, depois de experimentar, em aceitar ou refutar a conjectura e posteriormente provar ou generalizar, independentemente de o conseguir ou não. Relembre-se que a aluna associa a investigação matemática à resolução de problemas e identifica os seus processos de desenvolvimento com algumas das fases da resolução de problemas propostas por Pólya (1966).

Para a Marta, apesar de também seguir o processo de estabelecimento de conjecturas e a realização de experiências, a etapa final não é a redacção de conclusões, mas sim a procura de solução. A aluna, durante a realização de experiências, reparte a sua investigação em vários problemas e aceita as conjecturas que não são refutadas como solução para um problema de partida, sob dadas condições. Tal configura um terminar da investigação sem a generalizar, mas com o solucionar repartido, no sentido de encontrar várias soluções, cada uma das quais dependentes de determinadas condições e respeitantes a uma partição. Este aspecto pode reflectir a concepção que a aluna tem acerca da aplicabilidade da matemática. A aluna concebe a matemática como uma explicação da realidade. Para ela, todos os resultados são válidos desde que se indiquem as condições que é necessário verificar para que os ditos resultados possam ser verificados.

Um aspecto a salientar é a evolução dos alunos no desenvolvimento de investigações matemáticas. Os alunos participantes neste estudo foram aumentando, gradualmente, a importância dada à realização de experiências no seu processo de

desenvolvimento. Por exemplo, na fase do desenvolvimento, o André confirma as conclusões da terceira e quarta tarefa através da testagem de muitos exemplos, o que o conduz à generalização. A Marta explora muitos exemplos e agrupa-os em função dos resultados obtidos na terceira e quarta tarefas, coerente com a assumpção encontrada por Serrazina (1995), de que a realização de muitas experiências conduz à elaboração de significado. No entanto, uma dificuldade pode surgir. A existência de muitas experiências na fase da exploração pode implicar que o aluno esteja constantemente a reorientar o seu trabalho levando ao afastamento do seu objectivo inicial. Foi o que aconteceu ao Lourenço na primeira investigação.

Apesar de serem identificados quatro processos de desenvolvimento de uma investigação matemática, é possível afirmar que os alunos se envolvem mais profundamente nas investigações com o decorrer do tempo, aspecto que também foi identificado por Fonseca (2000). Os alunos tornam-se mais autónomos, passando a valorizar tanto as respostas como os processos usados. Acrescente-se que os alunos conseguiram realizar com maior sucesso as últimas investigações matemáticas.

O André, a partir da terceira tarefa, evidenciou uma atitude diferente na abordagem investigativa. Generalizou a situação ao afirmar que uma função polinomial de grau ímpar tem sempre pelo menos um zero, o que denota crescimento relativamente ao seu desempenho na primeira tarefa. Também o Lourenço, mas na quarta tarefa, apresentou nas suas conclusões um resumo dos quatro tipos de gráficos de uma função cúbica, o que denota uma preocupação com a questão da generalização da investigação e com as diferentes etapas do processo investigativo, preocupação esta que não se verificou na primeira e segunda investigações. A Marta explorou e generalizou a influência de vários parâmetros na expressão de uma função de terceiro grau na última tarefa, enquanto que na primeira não tinha passado da exploração das sugestões dadas na proposta. Tais resultados permitem-me afirmar que, a partir de um período de trabalho continuado e alargado no tempo com investigações matemáticas, os alunos do ensino secundário podem revelar a aprendizagem e o desenvolvimento das actividades de manipular, conjecturar, argumentar e provar ou generalizar (Mendes, 1997).

Em síntese, a partir das investigações realizadas pelos alunos envolvidos neste estudo, é possível distinguir os seguintes processos de desenvolvimento:

Aprofundar: é um processo de desenvolvimento que se caracteriza por um evoluir sucessivo na investigação. Através da avaliação dos avanços conseguidos, o aluno torna

mais desenvolvida a sua investigação, desbrava o caminho a seguir explorando o avanço conseguido na etapa anterior. Ele vai eliminando e abandonando os casos que não lhe interessam, por conterem erros ou dificuldades, e aproveita as sistematizações que lhe podem vir a ser úteis.

Ziguezaguear: é um processo de desenvolvimento que se caracteriza pela evidência de avanços e recuos. O aluno ao chegar a uma conclusão, não a valida definitivamente, procura contra-exemplos, ou interações, ou pesquisa noutros suportes, de forma a atingir a confirmação de validade. Este processo é caracterizado pelo refazer da investigação, desde o início, sempre que identifica um dado novo ou um contra-exemplo.

Conjecturar, experimentar, solucionar: são processos de desenvolvimento que são caracterizados pela existência de uma suposição de partida. O aluno faz várias afirmações sobre o que investiga e que são as possíveis conclusões acerca do resultado final. Seguidamente, realiza várias experiências, através de uma cadeia de experimentações de exemplos e contra-exemplos que procuram dar solução ao problema de partida. Como resultado final, o aluno aceita as conjecturas que não foram refutadas como sendo soluções para partições que constituem a investigação. A investigação fica subdividida em várias partições, com condições presumíveis, e cada solução resolve um problema, sem existir a preocupação da generalização global.

Conjecturar, experimentar, generalizar: são processos de desenvolvimento que são caracterizados pela existência de uma suposição de partida. O aluno faz uma afirmação sobre o que investiga, que é uma conclusão intuitiva do resultado final. Seguidamente, realiza várias experiências, através de exemplos ou contra-exemplos que têm como objectivo aceitar ou refutar a afirmação de partida. No caso de ser refutada, o aluno ajusta a afirmação tendo em conta as experiências realizadas e volta a experimentar. No caso de ser aceite, o aluno procura generalizar ou provar, a afirmação, ou seja, encontrar resultados.

Recursos

Das experiências de aprendizagem realizadas compreende-se que as situações de trabalho na sala de aula com investigações matemáticas incluem vários factores que

influenciam a sua concretização. Ao planear este tipo de aula não é possível planear os caminhos que os alunos seguem, o que acrescenta um grau de incerteza ao desenvolvimento da aula. Para a sua implementação é necessário ter em conta a forma como é apresentada a proposta de investigação aos alunos, o tempo que é disponibilizado para a sua concretização, o recurso ou não de materiais pedagógicos de apoio, o tipo de orientação a dar aos alunos, etc. Também se verifica a mudança de atitude dos alunos e do professor (Selas & Almeida, 2002; Brunheira, 2002), assim como das interacções estabelecidas no decurso de uma investigação.

Os alunos encontram-se em situação de confronto e procuram explicar, justificar, argumentar, expor ideias, dar ou receber informações para tomar decisões, planear ou partilhar o trabalho e obter recursos. O professor, na gestão do processo de ensino ajusta permanentemente os conteúdos, o feedback e os ritmos de ensino em função do trabalho e do nível dos alunos, da sua participação, do nível de compreensão e de memorização que manifestam.

O trabalho de natureza investigativa obriga o professor a dar mais atenção à avaliação reguladora, porque a actividade passa a estar centrada no aluno. A avaliação reguladora passa por realizar o ponto de situação em qualquer fase da investigação, com o objectivo de verificar como as coisas estão a decorrer com vista a aperfeiçoá-las, se necessário. Adopta-se, assim, uma atitude coerente com o referido por George & Cowan (1999), em que a avaliação formativa é definida com a intenção de identificar a necessidade e a capacidade de melhorar, o que se pode traduzir na melhoria dos trabalhos seguintes se o professor emitir comentários para os alunos.

A mudança de atitude do professor e dos alunos verifica-se também ao nível das interacções no processo investigativo. Evidencia-se uma atitude coerente com o que os autores Ponte et al. (1999b), Brunheira (2000), Varandas (2000), Brocardo (2002) e Santos et al. (2002) salientam: os papéis desempenhados por cada actor mudam, o professor passa a escolher a situação de partida e o aluno a formular as questões e a escolher o caminho de abordagem.

Nas investigações matemáticas pressupõe-se que o aluno desenvolva uma actividade próxima da actividade do matemático em que surgem dificuldades, raciocínios erróneos e obstáculos - naturais no trabalho de qualquer matemático. Ao reflectir sobre o seu trabalho, o aluno toma consciência dos erros cometidos e da necessidade de os corrigir, assim como das dificuldades e da forma de as ultrapassar. O aluno, na procura dos conhecimentos e das estratégias que permitam confirmar os seus

processos ou ideias, para continuar a investigar, procura estabelecer interacções com o professor, com os seus pares ou procura apoio a outros recursos, desenvolvendo assim uma atitude de auto-regulação das aprendizagens.

Interacções com o professor. Nos vários alunos participantes neste estudo são identificadas dificuldades que provêm de conceitos erróneos acerca das propriedades de entes matemáticos, o que reforça a solicitação do professor para esclarecer dúvidas ligadas a conceitos (Tudella et al., 1999). O Lourenço, na primeira tarefa, teve dificuldade em distinguir os diferentes quadriláteros, em particular as características que permitem distinguir os rectângulos e os paralelogramos e a Rita sentiu várias dificuldades relacionadas com a linguagem, em particular o termo conjectura e a caracterização do polígono regular. No caso do André, os polígonos regulares e irregulares gozavam das mesmas propriedades. Também é de salientar a confusão que a Marta estabeleceu em torno da definição de pavimentação regular e polígono regular, na segunda tarefa.

A mobilização de conteúdos, nas diferentes etapas da actividade investigativa, é uma dificuldade dos alunos que está relacionada com o não domínio da linguagem matemática, da terminologia, dos símbolos, das propriedades e dos conceitos matemáticos. Estas dificuldades podem estar associadas ou não com o desenvolvimento de competências básicas de comunicação na língua materna, uma vez que muitas vezes se verifica a não transposição do significado comum de um conceito, na língua materna, para o contexto da linguagem matemática. Estes aspectos podem ser agravados quando os alunos têm dificuldades de comunicação, o que não acontece com os alunos estudados que foram escolhidos para participarem por terem facilidade de comunicação.

Os alunos procuram o apoio do professor nos processos de interpretação e de desenvolvimento, nas dificuldades, nos erros e na reflexão sobre o trabalho desenvolvido. O professor não tem a preocupação de arbitrar conflitos, como é referido por Tudella et al. (1999), porque os alunos têm outro nível de maturidade, mas o professor preocupa-se em dar ao aluno o feedback adequado ao desenvolvimento da investigação.

No caso do André, a minha intervenção na primeira tarefa prende-se com o ultrapassar de uma dificuldade de interpretação da proposta e o estabelecimento da interacção tem o objectivo de esclarecer aquilo que se pretende com a investigação, ou

seja facilitar a interpretação. Com o Lourenço, é necessária a negociação de significados (Wertesh, 1991) através de interacção, que resulta na orientação do aluno e proporciona o desenvolvimento da actividade investigação, nomeadamente procurei que reflectisse acerca do papel das sugestões nas três tarefas em que elas existem.

Ao nível do professor, os alunos podem procurar a tradução da proposta por outras palavras, a clarificação de conhecimentos, a compreensão de significados, a obtenção e a confirmação de estratégias, a correcção de erros e a validação de resultados. O papel do professor passa a ser mais importante na ajuda a dar ao aluno, para que este **saiba onde está, se avança ou reajusta**.

Estas interacções, segundo César (1997), no processo de ensino e aprendizagem, funcionam como um favorecimento à regulação das aprendizagens e são concretizadas pelo explicar de outra forma, modificar a tarefa, alterar os objectivos, desdramatizar a situação, modificar os tempos estabelecidos, alterar os objectivos em função do trabalho realizado e responsabilizar o aluno. Coerente com o descrito por Perrenoud (1999).

Neste enquadramento, é fundamental o feedback que o aluno obtém do professor para ultrapassar dificuldades, para reflectir e para validar o seu trabalho. Mason (1991) refere-se precisamente ao facto da avaliação formativa ficar comprometida se o professor orientar os alunos de forma excessiva ou insuficiente. Mas é importante manter a interacção e não adoptar uma estratégia de exigência excessiva, o que pode desmotivar os alunos (Perrenoud, 1996).

As orientações que o professor fornece ao aluno, durante a investigação, são entendidas como um favorecimento para:

Ultrapassar dificuldades: verifica-se quando o aluno pede a intervenção do professor para o ajudar a interpretar ou para o ajudar a dar continuidade à investigação. O professor pode traduzir a proposta de investigação por outras palavras ou pode clarificar conhecimentos, o que significa ajudar a compreender o significado de conceitos e propriedades ou mesmo propor estratégias;

Reflectir: verifica-se quando a intervenção do professor vai no sentido de levar o aluno a confrontar os resultados com os conhecimentos que possui, geralmente matemáticos, e assim possibilitando a identificação de erros. Noutras situações, após a realização de várias experiências e perante a eminência da apresentação de uma conclusão, o

professor fornece contra-exemplos que têm como objectivo levar o aluno a reflectir sobre a possível generalização. Também é possível identificar situações em que o professor incentiva a reflexão do aluno sobre todo o processo de investigação com vista a identificar erros e levar a refazer conjecturas;

Validar: verifica-se quando o professor é solicitado para confirmar os resultados obtidos, ou apenas o percurso seguido, numa das etapas do processo investigativo. Também é possível encontrar situações em que o professor orienta os alunos para procederem à pesquisa no livro, no caderno, ou outro suporte, de forma a possibilitar ao aluno a continuação da investigação. Noutras situações a intervenção do professor relaciona-se com o recolocar, quando o aluno, inconscientemente ou pela escolha de uma estratégia pouco compensadora, se afastou do problema de investigação.

Interações com os seus pares. A Marta usa frequentemente o confronto do seu trabalho com o dos seus colegas para a efectiva validação do que realiza, o que configura que na actividade investigativa desenvolvida pelo aluno se verifica o recurso aos outros alunos, que com ele interagem (Wertsch, 1991). As interações estabelecidas com o grupo de trabalho são diferentes das estabelecidas com o professor. No seio do trabalho de grupo, os alunos procuram discernir uma interpretação, comparar resultados, identificar erros, confrontar e discutir conclusões e obter contra-exemplos, tendo em vista **a avaliação do trabalho realizado**.

Durante o desenvolvimento da investigação, os alunos deparam-se com a dificuldade de definir, ou de dar continuidade, a um percurso de trabalho. Esta dificuldade agrava-se quando a actividade tem um carácter mais aberto e pode ser atenuada quando existem figuras ou sugestões de investigação.

Os diferentes alunos usam os colegas do grupo de trabalho para discutir, comparar, confrontar, esclarecer, obter contra-exemplos e avaliar. O Lourenço é o aluno que menos se apoia no grupo de trabalho para concretizar a sua investigação, mas quando o faz tem por objectivo auto-esclarecer-se, identificar erros e obter contra-exemplos. A Marta reconhece as interações com os seus colegas como uma forma de ultrapassar dificuldades de dar continuidade à sua actividade investigativa. A Rita, embora não recorra muitas vezes aos seus colegas de trabalho, quando o faz procura avaliar o seu trabalho e fá-lo através da comparação com o que está ser desenvolvido pelos outros, identificando as semelhanças e as diferenças.

Nesta investigação verifiquei que os grupos com três e quatro elementos, nas experiências de aprendizagem em que estiveram envolvidos, tendem a explorar individualmente e apenas confrontam as conclusões. A opção metodológica de trabalho em diade na quarta tarefa permite evidenciar que os alunos ao trabalharem em diade são mais capazes de compreender, adoptar estratégias e fazer evolui-las (Branco, Angelino & César, 1995; César et al., 2002).

Os alunos recorrem aos seus pares para prosseguir ou reorientar o seu trabalho de investigação, quando pretendem ultrapassar dificuldades, quando se confrontam com raciocínios erróneos e quando pretendem auto-avaliar-se:

Ultrapassar dificuldades: verifica-se quando no seio do grupo de trabalho se desenvolvem interacções que possibilitam ultrapassar as dificuldades de interpretação e de desenvolvimento. Através da discussão para discernimento ou compreensão de uma interpretação, da comparação de resultados, do confronto de conclusões, da busca de contra-exemplos, os alunos auto-esclarecem-se e evoluem na investigação;

Identificar erros: verifica-se quando no seio do grupo de trabalho se desenvolvem interacções que possibilitam a identificação de erros, quer pela obtenção de contra-exemplos, quer pela confrontação das estratégias aplicadas por outro aluno ou após esclarecimento directo. Na fase inicial da investigação, existem interpretações provenientes de raciocínios erróneos que através das interacções são identificadas;

Identificar semelhanças e diferenças: verifica-se quando no seio do grupo de trabalho se desenvolvem interacções que permitem avaliar e esclarecer aspectos relacionados com a actividade de investigação e com o percurso escolhido. O aluno avalia o seu trabalho através da identificação das semelhanças e diferenças que consegue estabelecer com a investigação dos seus colegas.

Outros recursos para a orientação. A procura interactiva para obter resposta às questões com que é confrontado, leva o aluno a aderir a um mecanismo de regulação que permite o ajuste do processo de ensino e aprendizagem. Para a sua efectivação é necessário que o aluno reflecta sobre a sua aprendizagem, identifique as suas falhas, os seus erros e os ultrapasse, como também é referido por Abrecht (1991) e também por Pinto (2003). No entanto, para além das interacções com os intervenientes do processo

de ensino e aprendizagem, existem outros meios que o aluno recorre para a regulação. Não são tão visíveis como as interacções, por serem mais raros ou porque os professores não os sugerem ou não os valorizam com frequência no ensino secundário. Através dos da interacção crítica consigo próprio e dos materiais pedagógicos ou outros, na assumpção do desenvolvimento da avaliação reguladora, é possível a recolha de informação, a interpretação da informação à luz dos factores que estão na origem das dificuldades e a adaptação das actividades de acordo com a interpretação realizada, como é referido por Allal (1986).

O Lourenço mostra ser um aluno reflexivo e por isso utiliza frequentemente um sistema de interacção crítica consigo mesmo com vista a atingir o sucesso (Perrenoud, 1999), ou seja recorre a meios próprios. O Lourenço, por sua iniciativa, executa várias experimentações diferentes, e procura contra-exemplos como forma de aceitar ou refutar as suas conclusões. Principalmente, na segunda tarefa, o Lourenço, autonomamente, apela várias vezes à experimentação. O Lourenço usa uma modalidade de regulação baseada no registo, em folha destacável, das suas dificuldades e na forma de as ultrapassar. Sendo um aluno do tipo: o conhecimento construído pelo próprio (Davis & Mason, 1989), justifica esta atitude também com o facto dos outros lhe poderem criar uma influência negativa, darem pistas erradas ou quebrarem o ritmo de investigação, o que o pode desviar do objectivo pré-definido. Também, a Marta usa a reflexão pessoal sobre o que desenvolve e como o faz, coerente com Perrenoud (1999), para orientar o seu trabalho no sentido de o completar, nomeadamente na terceira tarefa quando executa muitas experiências de forma não aleatória.

Mas podem existir outros recursos ao dispor dos alunos na actividade investigativa. Na primeira tarefa, o Lourenço recorre ao livro adoptado para ultrapassar dificuldades relacionadas com a classificação de quadriláteros e na entrevista também refere a importância da Internet no apoio à aprendizagem. O André acompanha a procura de interacções com a pesquisa no livro ou no caderno diário para o esclarecimento de definições e conteúdos matemáticos, em particular a definição de polígono regular na primeira tarefa. Também indica a Internet como um recurso a ter em conta.

A Rita, na segunda tarefa, recorre aos *polidrons* para justificar que o pentágono regular não origina uma pavimentação regular, facto que só foi possível em virtude da aula de investigação decorrer numa sala em que esses materiais se encontravam disponíveis. As calculadoras gráficas foram outro instrumento fundamental às

experimentações realizadas na terceira e quarta tarefa, onde foram abordados conhecimentos relacionados com funções.

Os alunos buscam nestes recursos o feedback que não vem do professor ou dos seus colegas, mas que poderá vir do manual ou de outro recurso disponível, ou até da auto-reflexão e auto-avaliação, no momento em que sentem a dificuldade como afirma Hadji (1994). Os alunos podem ultrapassar as suas dificuldades, corrigir os seus erros e orientar a sua investigação tendo em conta os seguintes meios:

Interacção crítica consigo próprio: perante um obstáculo, o aluno opta por ultrapassá-lo sem recorrer a outro actor do processo de aprendizagem, nem mesmo, recorrer a outro suporte. É frequente que o aluno, perante a dificuldade, teste mais exemplos e procure contra-exemplos, experimente mais, reveja o processo que já executou, para refazer o seu trabalho e ultrapassar o bloqueio. É uma forma de auto-regulação das aprendizagens.

Materiais pedagógicos ou outros: conjunto de recursos constituído por suportes de apoio, como é o caso dos materiais manipuláveis, do caderno diário, do livro, da Internet e da calculadora gráfica, em que o aluno se apoia quando sente dificuldades. A procura destes suportes tem por objectivo recolher informação ou a realização de experiências apoiadas ou orientadas pelo recurso utilizado.

Erros

Para os alunos, deste estudo, é unânime que o erro faz parte do processo investigativo, o que é coerente com as assumpções de Pinto (2003), daí que não seja valorizado enquanto erro, mas como um elemento condicionador do resultado final da investigação. A atrapalhação que os erros provocam na actividade de investigação, leva os alunos a atribuir-lhes uma função na continuação do trabalho.

Os erros encontrados, neste estudo, relacionam-se com o não reconhecimento do procedimento adequado à investigação, com a dificuldade de interpretação, com o desconhecimento de terminologia, propriedades, definições matemáticas e com as dificuldades de utilização das tecnologias. Os erros cometidos pelos alunos, que os impedem de continuar ou afectam o seu raciocínio, comprometem toda a tarefa e necessitam de intervenção ou pesquisa noutros recursos. O professor é um factor

facilitador para ultrapassar os erros, como refere Pardala (1997), mas o aluno, autonomamente, também pode recorrer a outros suportes para os ultrapassar.

Havendo a convicção que mais tarde ou mais cedo serão detectados, os erros são ultrapassados através do estabelecimento de interações e através do recurso à pesquisa no caderno diário ou no manual.

Na auto-avaliação reflexiva, o aluno confronta-se com erros e dificuldades, o que funciona como um impulsionador da busca de interações, em especial com o professor, de forma a corrigi-los, o que acontece pelo feedback dado para ultrapassar dificuldades, para reflectir ou para validar.

Mas, segundo Santos (2003a), errar tem de ser visto como natural e não penalizador. Também Nunziati (1990), acerca da concretização de um mecanismo de avaliação formativa, em detrimento da condenação afirma ser necessário existir um plano para remediar os erros. O desenvolvimento desta intenção pode ser concretizada através de propostas de trabalho em que os erros sejam incluídos na dinâmica do processo de ensino e aprendizagem (Abrecht, 1991), onde lhes é dado um valor positivo.

O André, quando se confronta com erros assume-os como uma orientação para o caminho correcto e modifica a exploração depois de procurar a interacção com o professor. Para o Lourenço, os erros são vistos como um ajuste ou um contributo para a reorientação da tarefa, sobre os quais é necessário reflectir para proporcionar o conduzir da investigação no “bom caminho” (Hadji, 1994).

Mas, os erros também podem esclarecer as dúvidas surgidas e os conhecimentos não dominados, o que permite o reforço das aprendizagens. Neste aspecto, Serrazina (1995) está de acordo com a concepção de que o erro ensina (Hadji, 1994). A aprendizagem, através dos erros, relaciona-se com o facto “de não os repetir”, como é referido pela Marta e também pode ser encontrado nas investigações do André. Os dois alunos salientam que os erros podem proporcionar o esclarecimento sobre a aplicabilidade de algumas propriedades ou conceitos. Em particular, o André na segunda tarefa refere que os erros são importantes para excluir diversas possibilidades de solução e para saber que conhecimentos aplicar ou não a dada situação.

No caso da Rita, os erros também servem para a sua aprendizagem com a calculadora gráfica. A aluna aprende a trabalhar com a janela de visualização, por ter identificado os erros cometidos na quarta tarefa quando usa uma janela que não é a

adequada. Para a identificação destes erros foi fundamental a minha intervenção através do apelo à reflexão.

O erro, ainda, pode desviar. Isto é, levar à exploração de problemas que não se encontram relacionados com a investigação proposta. Na primeira tarefa, o André, ao colocar os seus quadriláteros num referencial, estratégia pouco compensadora para a investigação em causa, afastou-se do objectivo inicial da investigação que era a classificação de um quadrilátero e as suas propriedades. O mesmo sucedeu com o Lourenço, que ao não considerar o rectângulo como um caso particular de paralelogramo, deixa de explorar as relações geométricas entre as duas figuras e passa a explorar comprimentos aproximados e o teorema de Pitágoras.

O erro, tido como um factor de aprendizagem, ensina ou orienta o caminho a seguir. Estando integrados no processo de aprendizagem, como é preconizado por Nunziati (1990), Abrecht (1991), Perrenoud (1999), Santos (2003a) e Pinto (2003), não podem ser encarados através do aspecto penalizador, mas sim como um impulso que pode ser aproveitado pelo aluno para aprender (Perrenoud, 1999).

Em síntese, acerca da função que os alunos atribuem aos erros nas investigações matemáticas, identificam-se as seguintes:

Orienta: quando os erros funcionam como elemento impulsionador da definição de novos caminhos de investigação ou quando os erros fecham percursos pouco compensadores de investigação, ou seja, conduzem ao bom caminho (reorientação);

Ensina: quando os erros possibilitam a clarificação da aplicação de conteúdos e estratégias. Neste caso, os alunos consideram que os erros “servem de lição” porque reforçam o seu conhecimento acerca da aplicabilidade, ou não, de conteúdos ou de estratégias;

Desvia: quando os erros provocam uma diminuição do grau de dificuldade da exploração. Os alunos, pela facilidade emergente, exploram situações divergentes do solicitado, ou seja, realizam investigações paralelas.

Reflexão

Para César & Torres (1998), o desempenho do aluno em aula é susceptível de ser influenciado por diferentes factores: a situação, a tarefa, os instrumentos, os actores,

o estado social dos actores e o ambiente físico envolvente. É no seio deste contexto complexo e multifacetado que os alunos se envolvem em investigações matemáticas, como sendo uma situação de trabalho a considerar na sala de aula. No confronto com a tarefa, o aluno tem que explicar e argumentar acerca do seu ponto de vista, para além de desenvolver uma resposta à tarefa que lhe é colocada, o que está de acordo com o referido por Bishop e Goffree (1986), no sentido de que a aprendizagem não resulta somente da actividade mas também da reflexão sobre a actividade.

Os alunos usam a reflexão como uma forma de orientação do seu trabalho. O explicar a outro durante o desenvolvimento ou no final da investigação é um processo de reflexão, mas também o é a elaboração de um relatório final sobre a investigação. Neste estudo é usado o relatório escrito e também a reflexão escrita sobre o trabalho desenvolvido, solicitados a todos os alunos, no final de todas as investigações.

O relatório escrito individual, sobre o trabalho desenvolvido na sala de aula, é um dos instrumentos, de recolha de dados, estudado por Leal (1992) com alunos do terceiro ciclo. A investigadora refere que os relatórios permitem o desenvolvimento de capacidades do domínio cognitivo, como a comunicação, a interpretação, a reflexão, a exploração de ideias matemáticas e o espírito crítico, e, no domínio afectivo, o sentido de responsabilidade e de grupo, a perseverança e a relação entre os alunos. No presente estudo, é possível afirmar que são confirmados os aspectos encontrados por esta autora. Assim, podemos dizer que os mesmos aspectos se aplicam ao ensino secundário e é possível acrescentar que a qualidade dos documentos vai aumentando à medida que os alunos, frequentemente, são confrontados com a necessidade de os elaborar (Varandas, 2000; Brocardo, 2002). Também se verifica a construção de uma nova visão da actividade matemática (Valadares & Graça, 1999).

No primeiro relatório escrito que o André elaborou apenas apresentou as conclusões a que chegou, sem incluir os processos que usou para obtê-las, os erros ou as dificuldades com que se confrontou. Mas ao longo do ano lectivo, o André foi evoluindo e passou a valorizar e a incluir os processos utilizados, as figuras e gráficos que suportam as conclusões e a necessidade de provar ou generalizar as conjecturas efectuadas.

O Lourenço é um dos exemplos mais elucidativos da evolução dos alunos na produção dos relatórios escritos. Este aluno, no relatório sobre a primeira tarefa, não inclui os processos usados na investigação nem as justificações dos resultados encontrados e, gradualmente, passa a incluir os processos e as dificuldades sentidas,

culminando com a inclusão dos processos, das dificuldades, dos resultados, das interações e a forma como os relaciona com os resultados alcançados.

No caso da Marta, também se verificaram alterações significativas. No primeiro relatório inclui apenas as conclusões a que chegou, sem se referir aos processos usados ou às dificuldades sentidas. No entanto, na terceira tarefa inclui o processo de investigação, as dificuldades e a forma como foram ultrapassadas.

A Rita apresentou sempre relatórios bastante completos. Esta aluna incluiu os diferentes processos usados na exploração das tarefas, as opções e os raciocínios seguidos e a preocupação em comunicar os resultados a que chegou. O relatório apresentado pela Rita sobre a segunda tarefa (*Pavimentações*) destaca-se dos restantes porque a aluna não apresentou uma generalização. Este facto pode ser explicado por Rita não dominar na sua plenitude os conhecimentos que se relacionam com a Geometria, em particular ângulos e quadriláteros, como foi por si reconhecido na sua auto-avaliação do trabalho realizado.

Em síntese, no primeiro relatório, é de notar que os alunos não incluem as dificuldades, os erros, as explorações que não são bem sucedidas (ver quadro 8), o que segundo Oliveira (1998) pode ser justificado pelo facto dos alunos sentirem que a entrega do relatório ao professor pode constituir uma base para serem classificados.

O empenho em realizar um relatório escrito apela à reflexão profunda, o que segundo Kilpatrick (1992) não é exigido quando o aluno apresenta apenas uma solução para a proposta em que está a trabalhar. Neste estudo, não existiu um guião para a elaboração do relatório escrito o que possibilita a emergência das concepções que os alunos têm acerca da elaboração deste documento. A necessidade de elaborar um relatório final sobre o trabalho desenvolvido funciona como um catalizador à reflexão. Além de se constituir como um instrumento de avaliação é um factor de aprendizagem uma vez que o aluno tem de aprender a registar por escrito o seu pensamento, a articular ideias e a explicar procedimentos, ao mesmo tempo que critica os processos utilizados, avalia os desempenhos do grupo e o produto final (Menino & Santos, 2004).

A reflexão permite aos alunos a regulação das aprendizagens e a assimilação de saberes, o que é concretizado no binómio interacção e auto-avaliação (Jorro, 2000; Vial, 2001; Santos, 2002). Com a elaboração dos relatórios, é confirmado o argumento apresentado por Santos et al. (2002): ao solicitar relatórios escritos, em que os alunos descrevem a investigação realizada, está-se a possibilitar a reflexão sobre as

investigações matemáticas que fazem e é essencial para que possam tomar consciência dos processos que seguem e caminhar para a auto-regulação.

A generalidade dos alunos entende-o como um registo de conclusões, mas com o decorrer do tempo outros aspectos passam a ser incluídos, como se pode verificar pelo seguinte quadro:

Quadro 8 – Quadro resumo dos aspectos incluídos pelos alunos nos relatórios escritos.

	André	Laurenço	Marta	Rita
1ª tarefa	Regista conclusões; Não discute os resultados; Sem rigor matemático na apresentação do relatório; Não apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Não discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Não discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Generaliza.
2ª tarefa	Regista conclusões; Não discute os resultados; Sem rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Não discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Não discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.
3ª tarefa	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Generaliza.	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Não discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Não apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Generaliza.
4ª tarefa	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Generaliza.	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Generaliza.	Regista conclusões; Não discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Não discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Não mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Não generaliza.	Regista conclusões; Discute os resultados; Com rigor matemático na apresentação do relatório; Apresenta figuras e gráficos; Discute a pertinência do trabalho desenvolvido; Mostra os erros e dificuldades; Apresenta justificações e exemplos de aplicação; Generaliza.

Nos relatórios escritos dos quatro alunos deste estudo podem ser sintetizados os seguintes aspectos: o registo de conclusões; a discussão de resultados, o rigor matemático na apresentação de resultados, a pertinência do trabalho desenvolvido, as figuras e os gráficos que servem de suporte à justificação e aos exemplos de aplicação.

Ao nível das reflexões escritas, os alunos reflectem sobre as investigações matemáticas através dos factores que serviram de suporte à obtenção dos resultados: as interacções, os erros, as dificuldades, a auto-avaliação – que cumulativamente são os factores que possibilitaram a orientação.

A proposta de tarefas de investigação pressupõe que o aluno interpreta e desenvolve uma actividade significativa de modo a estabelecer pontes com os seus conhecimentos, com outras áreas, onde pode atingir diferentes níveis de aprofundamento de conteúdos matemáticos, através de um processo individual mas em interacção com os diferentes actores e recursos da sala de aula. A actividade desenvolvida não é a mesma para todos os alunos. Uma explicação para as diferentes formas de abordagem das investigações matemáticas liga-se com as experiências realizadas, os conflitos, a modificação do que já se sabe através da experiência, na construção do conhecimento matemático (Serrazina, 1995). Por exemplo, para o André a preferência vai para o tipo de trabalho em que é necessário reflectir, donde resulta uma actividade investigativa baseada na auto-avaliação do trabalho realizado.

Nas reflexões escritas, o André refere as suas dificuldades, os erros cometidos durante a investigação, a questão da generalização e a auto-avaliação. O André mostra dificuldade em auto-avaliar-se na forma escrita. A sua predilecção vai para a auto-avaliação na forma oral, porque concebe o processo avaliativo através da comunicação inter-pessoal. Prefere a discussão do trabalho realizado com o professor ou com os outros alunos. A forma interactiva, na opinião do André, conduz à reflexão sobre o trabalho desenvolvido e à definição de percursos alternativos. Ainda, na sua opinião, o confronto com os contra-exemplos apresentados por outros, alunos ou professor, favorece o desenvolvimento de um mecanismo de auto-avaliação e de regulação, o que é coerente com o analisado por Perrenoud (1999), Jorro (2000), Shepard (2001) e Santos (2002).

No caso do Lourenço, na reflexão escrita para além de serem incluídos alguns dos aspectos referidos por Pardala (1997) acerca da influência do professor no trabalho do aluno, são salientados outros que se relacionam com o enunciado da proposta de investigação, o tempo destinado à sua realização, as experimentações iniciais, o papel

dos conhecimentos na concretização, a importância das interações, os erros e as dificuldades. Este procedimento traduz uma auto-avaliação profunda de todo o processo investigativo, utilizada pelo aluno para clarificar e construir significados (Serrazina, 1995), o que é coerente com a associação feita pelo Lourenço das investigações matemáticas a dificuldades, embora as considere interessantes e desafiantes, logo aplica com frequência o recurso aos meios individuais para desenvolver o seu trabalho.

A Marta destaca as interações, os erros e a auto-avaliação do trabalho desenvolvido. A aluna afirma que as interações possibilitam a orientação da investigação e procura-as quando precisa de contra-exemplos, de discutir o processo que segue ou de confirmar o caminho que pretende seguir. Na auto-avaliação, a aluna inclui os seus níveis de concretização como uma forma de fazer o ponto da situação sobre o que já realizou.

A Rita, na forma escrita, mostra um sentido de auto-avaliação bastante apurado, estabelecendo a ligação entre aquilo que é esperado que concretize e aquilo que é capaz de concretizar. Analisa as intervenções do professor, dos colegas e manifesta-se acerca das vantagens que as mesmas têm para o seu trabalho. As interações são, para a Rita, a forma de progredir mais rapidamente na investigação, enriquecendo conhecimentos e capacidades, o que reforça as potencialidades das interações referidas por César (1995).

A orientação no processo de investigação advém das interações estabelecidas com o professor, o grupo de trabalho ou outro suporte, das várias experimentações efectuadas na busca de exemplos e contra-exemplos, da mobilização de conhecimentos, da identificação de erros e dificuldades, da auto-avaliação realizada através da verificação das conclusões registadas, dos processos usados, do tempo disponível para a concretização e da apresentação do relatório final. É através da reflexão em cada uma das etapas do processo investigativo, da auto-avaliação, da interação e da tomada de consciência da existência de erros e dificuldades que a investigação toma rumo e o aluno valida ou não os conhecimentos com que se confronta e estabelece percursos de continuação, constituindo, assim a avaliação reguladora – a regulação autónoma da aprendizagem.

Em resumo, os alunos estudados nesta investigação reflectem sobre os seguintes aspectos:

Interacções: o aluno refere-se às interacções que estabeleceu, durante a investigação, com o professor, o grupo de trabalho ou outro suporte. Salienta que tiveram o papel de fornecer novas vertentes de investigação, de aferição entre resultados, de confronto entre perspectivas de investigação e discussão de conclusões. Através de indicações relacionadas com competências matemáticas ou linguísticas, da realização de mais experiências, de busca de contra-exemplos ou de confirmação do caminho a seguir, serviram para a concretização da investigação;

Erros e dificuldades: o aluno refere-se aos erros como naturais no processo de aprendizagem. No entanto, atribui-lhes o significado de orientar, ensinar e desviar. Relativamente às dificuldades que são identificadas como provenientes de raciocínios erróneos ou do não desenvolvimento de algumas competências matemáticas, referem-se à forma como as mesmas foram ultrapassadas;

Auto-avaliação: o aluno refere-se à forma como foi concretizada a sua investigação, quer por aferição do trabalho realizado com os outros alunos, quer por procura de contra-exemplos que refutem um resultado emergente. Atribuem o sucesso à mobilização de conhecimentos, ao registo de conclusões e ao encontrar soluções que sirvam de resposta.

Reflexão final

Na minha actividade profissional, como professor do ensino secundário, sou confrontado com dilemas. A tomada de consciência dos problemas que enfrento no meu dia a dia levou-me a reflectir e a procurar compreender a sua natureza. Algumas destas situações problemáticas emergem da organização do sistema educativo, como é o caso da separação entre 3º ciclo e ensino secundário, outras advêm da sujeição da disciplina que lecciono à avaliação aferida e certificadora. Mas, ao nível das orientações curriculares e das opções metodológicas diárias, também é necessário questionar a minha prática e justificar as opções e abordagens que sigo. Esta consciencialização serviu de ponto de partida para a procura de respostas e para aprofundar o conhecimento que tenho da minha profissão, enquadrando-me no objectivo de compreender e mudar.

O impulso inicial deste estudo foi dado por um conjunto de questões que mostram a forma como interroguei a minha prática, e o que isso significa para mim. Na procura de explicação para as minhas opções e abordagens programáticas, duas questões

suscitaram a minha intervenção na prática: As minhas práticas de avaliação influenciam o percurso dos alunos? Como valorizar conhecimentos, capacidades e atitudes que os alunos adquirem no seu percurso escolar? Estas questões foram contextualizadas na problemática da avaliação e serviram de ponto de partida para aprofundar o meu conhecimento acerca da avaliação reguladora. A partir desta aceção, estabeleci as questões específicas às quais procurei responder com este trabalho. As definições metodológicas facilitaram a compreensão e alteração do processo de ensino e aprendizagem.

Na sala de aula, compreendi que existem processos essenciais à valorização do aluno enquanto agente autónomo e questionador da sua própria aprendizagem. As interações, com o professor, o grupo de alunos ou outro recurso, são fundamentais à concretização de um modelo eficaz de avaliação reguladora. Procuro interagir, valorizar o papel do aluno na sua avaliação e na sua aprendizagem. As interações são o recurso privilegiado pelos alunos quando procuram ultrapassar dificuldades, mas também as usam quando desenvolvem raciocínios demonstrativos através da procura de contra-exemplos, na interpretação através da tradução por outras palavras, na reflexão, na regulação e na auto-avaliação. Apesar de acreditar que os processos facilitadores da avaliação reguladora permitem uma maior harmonização entre o ensino, a avaliação e a aprendizagem, é necessário que se continue a investigar outras formas de atingir esta coerência e de valorizar o papel do aluno na sua aprendizagem.

Os professores, nas suas actividades de programação de aulas, devem ter em conta os pressupostos curriculares que são veiculados através dos documentos institucionais. As experiências solicitadas aos alunos podem proporcionar, simultaneamente, a oportunidade de avaliar e de aprender. A avaliação das aprendizagens, nalguns casos confundida com a avaliação aferida e certificadora, nem sempre proporciona ao aluno o conhecimento do nível das aprendizagens conseguidas. No meu entendimento, o aluno, enquanto pessoa diferenciada, deve ter oportunidade de manifestar os seus conhecimentos, capacidades e atitudes através do confronto com experiências de aprendizagem diversificadas. A escolha dos conteúdos, a forma como são explorados, o uso ou não de tecnologias ou materiais manipuláveis numa actividade de investigação é suficiente para proporcionar aos alunos uma abordagem distinta.

Antes de realizar este estudo acreditava que as propostas de trabalho que incluíssem sugestões de investigação ajudariam o aluno a iniciar e a progredir mais facilmente na sua actividade. Depois de estudar o assunto e reflectir, compreendi que o

aluno tem as mesmas dificuldades em perceber qual é o caminho que deve seguir, estando explícita ou não uma sugestão. A dificuldade de percepção da questão está muitas vezes relacionada com a compreensão de uma linguagem, que pode ser a compreensão da língua portuguesa ou da linguagem matemática. Para além disso, o aluno segue o caminho que a sua intuição lhe indica, semelhante ao trabalho do matemático, tornando-se numa actividade de investigação com uma abordagem própria, autónoma e diferenciada. No caso de não existir sugestão, o papel do professor é ainda mais importante no acompanhamento que dá ao aluno e no feedback que lhe oferece no favorecimento da avaliação reguladora, o que destaca a relação entre as experiências de aprendizagem solicitadas e o tipo de feedback a dar ao aluno.

Ao estudar os processos que os alunos, do ensino secundário, usam como forma de dar resposta às dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos que se confrontam nas investigações matemáticas percebi a importância que têm as situações de trabalho proporcionadas para a profundidade das aprendizagens conseguidas. Os alunos são estimulados a partir do exterior através da solicitação de uma proposta de trabalho. Estas experiências de aprendizagem são tão mais ricas quanto o significado que lhes é atribuído pelos alunos. A tarefa deve provocar o desenvolvimento da actividade cognitiva do aluno.

Para terminar, quero referir que este trabalho proporcionou-me várias aprendizagens ao nível do conhecimento das formas de enfrentar e analisar situações que se colocam na sala de aula, dos contextos criados para a aprendizagem e avaliação, do carácter único, incerto e de conflito do processo de ensino e aprendizagem e da necessidade de assumir valores, opções e estratégias de acção com vista a resolver problemas. Ainda, considero que foi uma oportunidade de contribuir para o conhecimento da problemática da avaliação e para a compreensão de que os professores de matemática, no desenvolvimento da sua actividade, têm um papel determinante no seu próprio desenvolvimento profissional.

Limitações do estudo

As limitações deste estudo são relativas às opções metodológicas e ao factor de o professor ser o investigador. O facto de se escolher uma metodologia de natureza qualitativa para compreender os processos que os alunos usam como forma de dar resposta às dificuldades, obstáculos e raciocínios erróneos com que se confrontam nas

actividades de investigação levou à escolha dos participantes e à selecção das tarefas propostas. Apesar de terem existido critérios precisos que presidiram à selecção dos participantes neste estudo, a escolha foi efectuada pelo investigador. Assim, os alunos incluídos neste estudo pertencem a uma realidade social situada, com uma caracterização sócio-económica definida e frequentam uma escola com características físicas próprias.

OK!

As actividades de aprendizagem para recolha de dados foram quatro. Duas de geometria e duas de funções. A apetência dos alunos não é mesma para os diferentes ramos da matemática, assim como a forma como cada actividade foi disponibilizada ao aluno esteve dependente do professor, tal como o tempo disponível para a sua concretização. Se disponibilizasse mais tempo ou escolhesse outras tarefas ou, ainda, as apresentasse de outra forma, noutro suporte ou auxiliadas com outros materiais pedagógicos, os alunos envolvidos poderiam eventualmente ter desenvolvido outro tipo de processos.

Para além destas limitações, existem ainda as que estão relacionadas com o tipo de relação pedagógica que ocorre na sala de aula. Um aspecto desta relação que afecta este estudo é o facto de o aluno poder solicitar ou não o professor em virtude de se sentir avaliado quando o faz. Este facto pode enviesar a recolha de dados através de alguns dos instrumentos, pois quando o aluno sente que isso contribui para a sua avaliação pode retrair-se e não solicitar o professor com a frequência que desejaria. Podemos, igualmente, falar na possibilidade da escrita das reflexões pessoais poderem de algum modo ter sido restringidas pelo facto do investigador ser simultaneamente o professor destes alunos. Assim, e apesar dos alunos terem sido esclarecidos sobre as finalidades deste estudo, coube-lhes decidir como actuar e o que incluir nos textos das suas reflexões escritas e dos seus relatórios.

Recomendações

Este estudo contribui para o conhecimento dos processos, dos recursos, da função dos conhecimentos erróneos e das reflexões sobre a actividade que os alunos do ensino secundário desenvolvem quando se confrontam com uma investigação matemática. Enquadrando-se numa perspectiva de que o conhecimento sobre os diferentes aspectos da actividade investigativa ajudam o aluno a tornar-se num elemento autónomo e impulsionador do seu próprio conhecimento, concretiza-se assim uma avaliação reguladora que favorece a aprendizagem. Mas, é necessário investigar os

processos e as interações que os alunos desenvolvem quando se confrontam com outras actividades de aprendizagem. Na procura de um maior equilíbrio entre a avaliação certificadora e a reguladora há que reforçar o papel do aluno no processo de ensino e aprendizagem e necessariamente ajustar as experiências de aprendizagem às formas de avaliação.

É sabido que o currículo português tem evoluído no sentido de valorizar a integração da avaliação no processo de ensino e aprendizagem, em particular da avaliação formativa, mas é necessário investigar para saber até que ponto as orientações curriculares emanadas pelos programas de Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, que entraram em vigor em Setembro de 2004, estão a ser concretizadas. Sem compreender a forma como os professores percebem as orientações curriculares, como as colocam em prática e como ultrapassam as dificuldades que surgem na concretização da avaliação reguladora não é possível intervir no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda, na problemática da avaliação formativa, é necessário continuar a investigar o tipo de processos que permitem ao aluno compreender a sua aprendizagem e o contributo para a efectiva regulação das aprendizagens. É conhecido que os alunos, quando se confrontam com a necessidade de elaborar um documento escrito, desenvolvem a sua aprendizagem sobre a forma de o fazer e sobre os processos, recursos e estratégias usados na obtenção do seu conhecimento. Mas, importa aprofundar, por exemplo, os aspectos que devem fazer parte de um documento escrito e o tipo de tarefas matemáticas, em contexto de sala de aula, que melhor se adaptam à elaboração de tais documentos. Assim, é necessário continuar a investigar o tipo de instrumentos que devem ser usados para recolher informação, de forma a ter em conta o que hoje se entende por saber e fazer matemática, que ultrapassa aquilo que é incluído num teste escrito de tipo tradicional.

Existir evidência de que as investigações matemáticas são situações de trabalho em aula com fortes possibilidades de integração da avaliação no currículo, por possibilitarem aos alunos, simultaneamente, a oportunidade de tomar consciência das suas aprendizagens, dos seus progressos, de se auto-avaliar, ou seja, implementar uma verdadeira avaliação reguladora. É, contudo, necessário investigar outras situações de trabalho na sala de aula e qual a forma de as rentabilizar, nomeadamente com ou sem sugestões, com ou sem o apoio de recursos tecnológicos, em contextos puramente matemáticos ou em contextos realísticos, entre outros.

Perante o conhecimento dos processos, dos recursos, da função dos erros e da reflexão sobre as investigações matemáticas que os alunos usam, os futuros professores, os professores, os educadores e os formadores, nas suas actividades de reflexão e investigação podem contemplar este saber, para o aprofundar e encontrar formas de o tornar operacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. & Leal, L. (1991). Avaliação da aprendizagem/avaliação na aprendizagem. *Inovação*, 3 (4), pp. 65-75.
- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática* nº 8, 7-10 e 35.
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projecto MAT₇₈₉* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Abrantes, P. (1999a). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.153-167). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Abrantes, P., Leal, L., Silva, M., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997a). *Propostas de actividades de MAT₇₈₉*. Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997b). *MAT 789: Inovação curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Abrantes, P., Porfírio, J., Veloso, E. & Silva, A. (1999b). O currículo de matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Abrecht, R. (1991). *L'évaluation formative: Une analyse critique*. Bruxelles: De Boeck.
- Afonso, M. & Afonso, P. (1995). Resolução de Problemas em Matemática: ensina-se primeiro e avalia-se depois ou ensina-se avaliando? *Actas do ProfMat95*, Lisboa: APM, 141-147.
- Alarcão, I. (1996). *Ser professor reflexivo. Formação reflexiva de professores*. Porto: Porto Editora.
- Alarcão, I. (2001). Professor – investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Ed.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol.1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.
- Allal, L. (1986). Estratégias de avaliação formativa: concepções psicopedagógicas e modalidades de aplicação. In L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (Orgs.). *Avaliação Formativa num Ensino Diferenciado* (pp. 175 - 196). Coimbra: Livraria Almedina.

- Allal, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise: processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. In M. Huberman (Org.). *Assurer la réussite des apprentissages scolaires. Les propositions de la pédagogie de maîtrise*. Paris: Delachaux et Niestlé, pp. 86-126.
- Almeida, D. (1987). Atitudes dos alunos face à resolução de problemas: influencia do tipo e da forma do problema. *Actas do ProfMat 87*, Lisboa: APM, 85-98
- Alves, M. (2004). *Currículo e avaliação: Uma perspectiva integrada*. Porto: Porto Editora.
- Amorim, I. (1996). *Jogar na bolsa com uma folha de cálculo*. Lisboa: IIE.
- Argyris, C. & Schön, D. (1974). *Theory in practice: Increasing professional effectiveness*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Associação de professores de matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Associação de professores de matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e-IIE.
- Bain, D. (1988). L'évaluation formative fait fausse route, in INRAP, *Évaluer l'évaluation*, Dijon, INRAP, pp. 167-172.
- Barbosa, J. (1996). Avaliação dos alunos do ensino secundário: Que fazer? *Noesis*, 40, pp. 30-32.
- Barreira, C. (2002). Teoria e prática da avaliação das aprendizagens em contexto escolar. In J. Costa, A. Mendes & A. Ventura (Orgs.), *Avaliação de Organizações Educativas: actas do II Simpósio sobre organização e gestão*. Aveiro: Universidade.
- Beillerot, J. (2001). A "pesquisa": Esboço de uma análise. In M. André (Ed.), *O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores* (pp.71-90). Campinas: Papirus.
- Bernardin, J. (1997). *Comment les enfants entrent dans la culture écrite*. Paris: Retz.
- Beyer, A. (1993). Assessing student's performance using observation, reflections and other methods. In N. Webb & A. Coxford (Eds.), *Assessment in the mathematics classroom* (pp. 111-120). Reston : NCTM
- Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom Organization and Dynamics. In B. Crhistiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 309-365). Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

- Black, P. & Wilian, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5, 1, pp. 103-110.
- Bloom, B., Hastings, J. & Madaus, G. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York: Mac Hill.
- Bodgan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos*. Porto: Porto Editora.
- Bonniol, J. (1989). Sur les regulations du fonctionnement cognitive de l'élève: contribution à une theorie de l'évaluation formative. *Atelier de recherché sur l'évaluation des resultants scolaires: Motivations et réussite des élèves* (Liège, 12-15 Septembre 1989). Strasbourg: Conseil de l'Europe.
- Branco, J., Angelino, N. & César, M. (1995). Tarefas matemáticas – Trabalho em diáde vs individual. *Actas do ProfMat95*, Lisboa: APM, 82-92.
- Broadfoot, P. (1996). *Evaluation, assessment and society*. Buckingham: Open University Press.
- Broadfoot, P. et al. (1988). *Records of archievement: Report of the National Evaluation of Pilot Schemes (PRAISE)*. London: Her Majesty's Stacionery Office.
- Brocardo, J. (2002). *As investigações na aula de matemática: UM projecto curricular no 8º ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Brocardo, J. (2003). As investigações matemáticas: análise de um projecto curricular. *Actas do XIV seminário de investigação em educação matemática*, Lisboa: APM, pp. 45-61.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In *La Probématique et l'enseignement de la mathématique*. Louvain-la-Neuve, 101-117.
- Brousseau, G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques, in Artique M. et al. (dir.). *Vingt ans de didáctica des mathematiques en France*, Grenoble LaPensée Sauvage, 51-66.
- Brun, J. (1986). A avaliação formativa num ensino diferenciado da matemática. In L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (orgs.). *A Avaliação Formativa num Ensino Diferenciado* (pp. 231 - 248). Coimbra: Livraria Almedina.
- Brunheira, L. (2000). *O Conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

- Brunheira, L. (2002). O conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de matemática. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 183 – 205) Lisboa: SPCE.
- Buescu, J. (2003). Ensino da Matemática: um sintoma, várias causas. *Gazeta da Matemática* n° 145, pp. 24-33.
- Candeias, A. (1993). Políticas educativas contemporâneas: críticas e alternativas. *Colóquio Educação & Sociedade*, 4, 97-121.
- Caraça, B. (2000). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Cardinet, J. (1986). Linhas de desenvolvimento dos trabalhos actuais sobre a avaliação formativa. In L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (Orgs.). *A Avaliação Formativa num Ensino Diferenciado* (pp.289–306). Coimbra: Livraria Almedina.
- Carrillo, J. (2002). Comentário à conferência de Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira, apresentada no XII Seminário de Investigação em Educação Matemática. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.309-323). Lisboa: APM.
- Casanova, M. (2002). *Manual de evaluación educativa* (Octava edición). Madrid: La Muralla.
- César, M. & Oliveira, O. (1999). O Professor do ano 2000: a importância das interacções na aula de matemática. *Actas do ProfMat99*, Lisboa: APM, 323-328.
- César, M. & Torres, M. (1998). Students Interactions in maths class. In P. Abrantes, J. Porfírio & M. Baía (Orgs.), *The interactions in the mathematics classroom – Proceedings of CIEAEM 49* (pp.76-85). Setúbal: ESES.
- César, M. (1994). Factores psico-sociais e equações. *Actas do ProfMat94*, Lisboa: APM, 82-92.
- César, M. (1995) Interacção entre pares e resolução de tarefas matemáticas. *Actas do VI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Lisboa: APM, 225-240.
- César, M. (1997). *O papel da interacção entre pares e resolução de tarefas matemáticas*. Col. Horizontes Pedagógicos, n°23. Lisboa: Instituto Piaget.
- César, M., Silva, R., Costa, C., Fonseca, S., Martins, H. & Malheiro, L. (1999). Sapo ou Príncipe Encantado? – 2º acto. *Actas do ProfMat99*, Lisboa: APM, 241-248

- César, M., Ventura, C., Branco, N. & Matos, A. (2002). Uma aventura fantástica: contributos do trabalho em diáde para o sucesso de uma actividade de investigação. *Actas do ProfMat2002*, Lisboa: APM, ???-???
- Chevallard, Y. (1991). LA transposition didáctique. *Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage (2^e édition revue et argumentée, em coll avec Marie-Alberte Joshua).
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (eds.)(1995). *The emergence of mathematical meaning – interaction in classroom cultures*. NewJersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Cobb, P. (1988). The tension between Theories of Learning and Instruction. In *Educational Psychologist*, 23 (2), 87-103.
- Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationship of knowledge and practice: Teacher learning in the communities. *Review of research in education* (24), 249-305.
- Cockcroft, W. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.
- Correia, J. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: contributos para o estudo da pergunta* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Cortês, L. (2002). Formas de ensinar, formas de avaliar. Breve análise de práticas correntes de avaliação? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), *Avaliação das aprendizagens das concepções às práticas* (pp. 35-42). Lisboa: Ministério da Educação: DEB.
- Costa, C. (2002). Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 257 – 273) Lisboa: SPCE.
- Crawford, K., & Adler, J. (1996). Teachers as researches in mathematics education. In K. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (orgs), *International handbook of mathematics education* (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.
- D' Ambrósio, U. (1994a). Avaliação: Eliminar ou Manter? Ou Reconceituar? *Actas do ProfMat94*, Lisboa: APM, 137-141.
- D' Ambrósio, U. (1994b). A pesquisa em Educação Matemática: da Teoria à Prática – da Prática à Teoria. *Actas do ProfMat94*, Lisboa: APM, 17-23.
- Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva

- Davis, P. & Mason, J. (1989). Notes on a radical construtivist epistomethodology applied to didactic situations. *Journal of structured learning*, vol. 10, 157-176.
- Davis, R. (1992). Reflections on where mathematics education now stands and on where it may going. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.724-734). New-York : Macmillan.
- Dellannoy, C. (1997). *La motivation. Désir de savoir, décision d'apprendre*. Paris: Hachette.
- Denzin, N. (2003). *Strategies of quatitative inquiry* (Second Ed.). Newbury Park: Sage.
- Departamento do Ensino Secundário (2002). *Programa de Matemática A – 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Dewey, J. (1933). *How we think*. London: Heath.
- Doise, W. & Mugny, G. (1981). *Le développement socialde l'intelligence*. Paris: InterEditions.
- Domingos, A. (2002). A construção do conhecimento matemático avnçado: O caso do conceito de sucessão. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 291 – 309) Lisboa: SPCE.
- Domingos, M. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações* (tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In Davis Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38, 85-109.
- English, L., Jones, G., Lesh, R., Tirosh, D. & Bussi, M. (2002). Future insues and directions in international mathematics education research. In L. English (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 787- 812). New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In MC Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: Macmillan.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Leal & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Fernandes, D. (1993). Complexidade, tesões e Mudança na Avaliação das Aprendizagens. In L. Almeida, J. Fernandes & A. Mourão (Orgs.), *Ensino Aprendizagem da Matemática. Recuperação de Alunos com Baixo Desempenho*. Riba d'Ave: Didáxis, 43-60.
- Fernandes, D. (1996). Perspectivas de renovação em educação matemática. *Dez anos de ProfMat, Intervenções* (pp. 35-50). Lisboa: APM.
- Fernandes, D., Ferraz, M., Carvalho, A., Dantas, C., Cavaco, H., Barbosa, J., Tourais, L. & Neves, N. (1994). Avaliação formativa: algumas notas. *Pensar avaliação, melhorar a aprendizagem*. Lisboa: IIE.
- Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Fonseca, H. (2002). Aprender a ensinar investigando. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.177-188). Lisboa: APM.
- Fontana, A. & Frey, J. (1994). Interviewing. The art of science. In N. Dezin & I. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. London: Sage Publications.
- Fonzi, J. (1999). Compreender o que é necessário para apoiar os professores no desenvolvimento de uma pedagogia de inquirição: identificando as necessidades de aprendizagem e práticas adequadas de desenvolvimento profissional. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.51 – 68). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Fortin, M. (2000). *Le processus de la recherche: De la conception à la réalisation*. Paris: Décarie Éditeur.
- Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In Orton & G. Wains (Orgs.), *Issues in teaching mathematics* (pp.150-173). London: Cassel.
- Garcia, C. (1992). A formação de professores. Novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In A. Nóvoa (Org.), *O Professor e a sua Formação*. Lisboa: Publicações Dom Quixote e IIE.
- Garnica, A. (1999). Filosofia da educação matemática: Algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa. In M. A. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas* (pp. 59-74). São Paulo: Editora UNESP.
- Garnica, A. (2001). É necessário ser preciso? É preciso ser exacto? “Um estudo sobre argumentação matemática” ou “Uma investigação sobre a possibilidade de

- investigação”. In H. Cury (Ed.), *Formação de professores de matemática: Uma visão multifacetada* (pp. 29-48). Porto Alegre: Artmed Editora.
- GAVE (2002). *Contributo para uma melhor compreensão do desempenho dos alunos nos exames do 12º ano*. Lisboa: GAVE, Ministério da Educação.
- George, J. & Cowan, J. (1999). *A Handbook of Techniques for Formative Evaluation*. London: Kogan.
- Gilly, M. (1990). Mécanismes psychosociaux des constructions cognitives: perspectives de recherche à l'âge scolaire. In G. Netchine-Grynberg (Ed.), *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfants*. Paris: PUF, cap.10, 210-222.
- Gimeno-Sacristón, J. (1998). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artemed.
- Gipps, C. (1999). Socio-cultural Aspects of Assessment – The Assessment Relationship. *Review of Research in Education*, 24, pp. 355-392. (Tradução: 2003, Relações avaliativas. *Educação e Matemática*, (73) 86-89)
- Goetz, J. & Lecompte, M. (1984). *Etnografia e diseño qualitative en investigación educative*. Madrid: Morata.
- Goldenberg, P. (1998). “Hábitos de pensamento”: um princípio organizador para o currículo (I). *Educação matemática* nº 47. Tradução de “‘Habits of mind’ as an organizer for the curriculum”, publicado em 1996 no *Journal of Education* 178 (1): 13-34, Boston University.
- Goldenberg, P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35 – 49). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Graça, M. (1994). Avaliação na Resolução de Problemas. *Actas do ProfMat94*, Lisboa: APM, 275-277.
- Graça, M. (1995). *Avaliação da resolução de problemas: contributo para o estudo entre as concepções e as práticas pedagógicas dos professores*. (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational studies in mathematics*, 38, 111-133.
- Guerra, M. (1995). *La evaluación: Un proceso de diálogo, comprensión y mejora*. Málaga: Aljibe.

- Hadji, C. (1994). *Avaliação, Regras do Jogo. Das intenções aos instrumentos*. Lisboa: Porto Editora.
- Hatch, G. (1995). If not investigations – What? *Mathematics Teaching* 151, 36-39.
- Jonnaert, Ph. (1996). Dévolution versus contre-dévolution! Un tandem incontournable pour le contrat didactique. In C. Raisky & M. Calliot (Orgs.). *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour de concepts fédérateurs*. Bruxelles: De Boeck, pp. 115-158.
- Jorro, A. (2000). *L'enseignant et l'évaluation: Des gestes évaluatifs em question*. Bruxelles: De Boeck.
- Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. Em D.A. Grows Ed., *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, pp. 3-38. New York, NY: Macmillan.
- Kilpatrick, J. (1998). Investigação em Educação Matemática e desenvolvimento curricular em Portugal: 1986-1996. In M.V. Pires et al. (Eds.), *Caminhos para a Educação Matemática* (pp. 9-25). Lisboa: SEM-SPCE.
- Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation? In R. Biehler, R. Scholz, R. Straber & B. Winkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer.
- Leal, L. (1992). *Avaliação das aprendizagens num contexto de inovação curricular*. (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Leal, L. (1997). Exames: uma via a prosseguir? In *Educação e Matemática* nº 43, pp. 5-12.
- Lemos, V., Neves, A., Campos, C., Conceição, J. & Alaiz, V. (1992). *A nova avaliação da aprendizagem*. Lisboa: Texto Editora.
- Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa – Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34), Lisboa: IIE.
- Loureiro, C., A. Oliveira, Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Lisboa: DES do ME.
- Machado, V. (1998). A avaliação e o programa de matemática. *InforMat* nº 2 (I). Lisboa: DES.

- Martins, M. (1996). *A avaliação das aprendizagens em matemática: concepções de professores*. (tese de mestrado, Universidade católica Portuguesa). Lisboa: APM.
- Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK. *ZDM*, 91 (1), 14-19.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Londres: Addison-Wesley.
- Matos, J. & Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. In C. Sloyer, W. Blum & I. Huntley (Orgs.), *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 72 – 82). Yorklyn, DE: Water Street Mathematics.
- Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Matos, J. M. (1994). Aprendizagens de Matemática ou De que são feitos os conceitos matemáticos? *Actas do ProfMat94*, Lisboa: APM, 45-49.
- Mendes, E. (1997). *A actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do Ensino Básico. *Actas do XV SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)* (pp. 271-291). Lisboa: APM.
- Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumento de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2º ciclo do Ensino Básico*. (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). (no prelo)
- Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Ministério da Educação (1991). *Matemática e Métodos Quantitativos: Organização Curricular e Programas*. Lisboa: Direcção Geral dos Ensino Básico e Secundário.
- Ministério da Educação (1993). Despacho Normativo nº 338/93. *Diário da República* nº 247, pp. 5934-5937.
- Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas – 10. 11º e 12º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2001). Matemática A. <http://des.min-edu.pt>

- Ministério da Educação (2004). Decreto –Lei nº 74/2004. *Diário da República* nº 73, pp. 1931- 1942.
- Moyer, P. & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. In B. Jaworski (Ed.), *Journal of mathematics teacher education* (pp. 293-315). Kluwer Academic Publishers.
- MPT (2000). *Investigações matemáticas na sala de aula. Propostas de trabalho*. Lisboa: APM.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE (Tradução portuguesa da edição original de 1989).
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e IIE (Tradução portuguesa da edição original de 1991).
- NCTM (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE (Tradução portuguesa da edição original de 1995).
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Niss, M. (1993). Assessment in mathematics educational and its effects: Na introduction. In M. Niss (Org.), *Investigations into assessment in mathematics education* (pp. 1-30). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers pédagogiques*, nº 280, pp. 47-64.
- Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de matemática: aspectos da prática do professor*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Oliveira, H. (1999). Narrativa na prática e na investigação sobre as investigações matemáticas dos alunos. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.207 – 214). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Oliveira, H., Ponte, J., Santos, L. & Brunheira, L. (1999a). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.97 – 110). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Oliveira, H., Segurado, M. & Ponte, J. (1999b). Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.175 – 182). Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Oliveira, H., Segurado, M. & Ponte, J. (1999c). Tarefas de investigação em Matemática: histórias da sala de aula. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.189 – 206). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.29-42). Lisboa: APM.
- Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 25 – 40) Lisboa: SPCE.
- Pardala, A. (1997). Theoretical and practical aspects of the interactions in teaching mathematics at school. In P. Abrantes, J. Porfírio & M. Baía (Orgs), *The interactions in the mathematics classroom – Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESES.
- Perrenoud, Ph. (1986). Das diferenças culturais às desigualdades culturais: A avaliação e a norma num ensino diferenciado. In L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (Orgs.). *A Avaliação Formativa num Ensino Diferenciado* (pp.27–74). Coimbra: Livraria Almedina.
- Perrenoud, Ph. (1988). La part d'évaluation formative dans toute evaluation continue. In INRAP, *Évaluer l'évaluation*, Dijon : INRAP, pp. 202-210, retirado em 3/6/2004. (http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1988/1988_05.html)
- Perrenoud, Ph. (1996). *Métier d'élève et sens du travail scolaire*. Paris: ESF, 3e édition.
- Perrenoud, Ph. (1998). From formative evaluation to a controlled regulation of learning processes: Towards a wider conceptual field. *Assessment in Education : Principles, Policy & Practice*, 5, 1, pp. 85-102.
- Perrenoud, Ph. (1999). *Avaliação, Da excelência à Regulação das Aprendizagens, Entre Duas Lógicas*. Porto Alegre: Artmed Editora.
- Perrenoud, Ph. (2001). *Porquê construir competências a partir da escola?* Porto: Edições ASA.
- Perrenoud, Ph. (2004). Évaluer des compétences. *Éducateur*, n° spécial " La note en pleine évaluation ", mars, pp. 8-11, retirado em 31/03/2005.

(http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2004/2004_01.html)

- Perret-Clermont, A. & Nicolet, M. (1988). *Interagir e Connaitre – enjeux et régulations sociaux dans le développement cognitif*. Fribourg: Del Val.
- Pinto, J. (2003). A Avaliação e a aprendizagem: da neutralidade técnica à intencionalidade pedagógica. *Educação e Matemática*, 74, 3-9.
- Pires, M. (1992). *Processos de resolução de problemas: uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Pires, M. (2002). A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projecto de reflexão acção. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.125-154). Lisboa: APM.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classrooms: A pack oh teachers*. University of Oxford & University of Warwick.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. Leal & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Pólya, G. (1966). On teaching problem solving. In E. G. Begle (Ed.), *The role of axomatics and problem solving in mathematics* (pp. 123 – 129). Boston: Ginn.
- Ponte, J. (1992). O estudo de caso na investigação em educação matemática. Conferência realizada no seminário “*O saber dos Professores*”. Lisboa: FCUL.
- Ponte, J. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. Cooney & F. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht :Kluwer.
- Ponte, J. (2002a). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2002b). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? Conferência realizada no seminário sobre “*O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*”. Lisboa: CNE.
- Ponte, J. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, pp. 93-169. [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte \(Rev – SPCE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte (Rev – SPCE).pdf)
- Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES, Ministério da Educação.

- Ponte, J., Costa, C., Rosendo, A., Maia, E., Figueiredo, N. & Dionísio, A. (2002c). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SPCE.
- Ponte, J., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1998a). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfírio & M. Baía (Orgs), *The interactions in the mathematics classroom – Proceedings of CIEAEM 49* (pp.3-14). Setúbal: ESES.
- Ponte, J., Ferreira, C., Oliveira, H., Brunheira, L. & Varandas, J. (1999b). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J., Ferreira, C., Varandas, J., Brunheira, L. & Oliveira, H. (1999a). *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática*. Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J., Fonseca, H. & Brunheira, L. (1999c). As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. *Actas do ProfMat99*. Lisboa: APM, 91-101.
- Ponte, J., Matos, J. & Abrantes, P. (1998b). *Investigação em Educação Matemática. Implicações Curriculares*. Lisboa: IIE.
- Porfírio, J. & Abrantes, P. (1999). Professores, investigação e inovação curricular em Matemática. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.215 – 226). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Rafael, M. (1998). *Avaliação em Matemática no ensino secundário. Concepções e práticas de professores e expectativas de alunos*. (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Ramalho, G. (2001). *Resultados do estudo internacional PISA 2000: Primeiro relatório nacional*. Lisboa: Ministério da Educação, Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE)
- Relatório final do projecto MPT* (1999). Lisboa: DEFCUL.
- Rocha, A. (2002a). Os alunos de Matemática e o trabalho investigativo. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 99-124). Lisboa: APM.
- Rocha, H. (2002b). Avaliação com calculadoras gráficas: o ponto de vista dos alunos e a influência do professor. *Actas do ProfMat2002*, Lisboa : APM.

- Rochex, J. (1995). *Les sens de l'expérience scolaire*. Paris: PUF.
- Rogoff, B. (1982). Integrating context and cognitive development. In M. Lamb (Ed.), *Advances in developmental psychology*. Hillsdale, NY: Erlbaum, vol. 2, 125- 170.
- Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: student's access to significant mathematical ideas. In L. English (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-163). New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Romberg, T. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 49-64). Nova Iorque: Macmillan.
- Roque, C. & Cruz, L. (2001). *Matemática ao Virar da Esquina*. Lisboa: Gradiva.
- Rosales, C. (1984). *Criterios para una evaluacion formativa (segunda edición)*. Madrid: Narcea.
- Sadler, R. (1989). Formative assessment in the design instructional systems. *Instructional Science*, 18, 119-144.
- Sadler, R. (1998). Formative assessment: Revisiting the territory. *Assessment in Education*, 5, 77-84.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), *Avaliação das aprendizagens das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação: DEB.
- Santos, L. (2003a). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. In *Actas do XIV Seminário de investigação em Educação Matemática* (pp. 9-27). Lisboa: APM.
- Santos, L. (2003b). A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: Uma análise sucinta. *Quadrante*, XII(1), 7-20.
- Santos, L. (2003c). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação Matemática*, 74, 16-21.
- Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas do octavo simpósio de la sociedad española de investigación en educación matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 127-151). Universidade da Coruña.
- Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. & Rosendo, A. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de*

- investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* (pp. 83 – 106) Lisboa: SPCE.
- Santos, M. (1996). *Na aula de Matemática fartamo-nos de trabalhar. Aprendizagem e contexto da matemática escolar.* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Santos, V. (1997). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: Métodos alternativos.* Rio de Janeiro: Projecto Fundação, Instituto de Matemática, UFRJ.
- Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, 1, 4-8.
- Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner.* São Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schubauer-Leoni, M. (1988). Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestes par les élèves en mathématique. *Journal européen de sciences de l'éducation*, 1, nº2, pp. 139-153.
- Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. *AERA Monograph Series on Evaluation*, nº1, 39-43.
- Segurado, I. & Ponte, J. (1999). *Concepções sobre a Matemática e o trabalho investigativo.* Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-74). Lisboa: APM.
- Selas, L. & Almeida, C. (2002). Uma actividade investigativa para o ensino do algoritmo da divisão de fracções: uma reflexão sobre a avaliação dos alunos pelo professor. *Actas do ProfMat2002*, Lisboa: APM.
- Serrazina, L. & Oliveira, I. (2002). O professor como investigador: leitura crítica de investigações em educação matemática. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 283-308). Lisboa: APM.
- Serrazina, L. (1995). Ensinar/Aprender Matemática. *Actas do ProfMat95*, Lisboa: APM, 33-41.
- Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H. & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* (pp. 41 – 58) Lisboa: SPCE.

- Shepard, L. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational Researcher*, 29, 7, pp. 4-14.
- Shepard, L. (2001). The role of classroom assessment in teaching and learning. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th Edition). American Educational Research Association. New York: Macmillan.
- Silver, E. & Kilpatrick, J. (1994). "E pluribus unum": challenges of diversity in the future of mathematics education research. *Journal of Research in Mathematics Education*, 25 (6), 734-754.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, nº14, pp.66-91
- Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.
- Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática. Artigo publicado originalmente no livro *The teaching and assessment of mathematical problem solving*, de R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.
- Stein, M. & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Mathematics teaching in the middle school*, 3 (4), 268-275.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Orgs.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife: Brazil.
- Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Tyhomas, M. & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81-104.
- Taylor et al. (1997). Monitoring constructivist classroom learning environments. *International Journal of Educational Research*, 27, 293-301.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. & Nápoles, S. (1997). *Funções 10º ano de escolaridade*. DES do ME.
- Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I. & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Tunstall, M. & Gipps, C. (1996). Teacher feedback to young children in formative assessment: A pypology. *British Educational Research Journal*, 22, 389-404.
- Valadares, J. & Graça (1999). *Avaliando para melhorar a aprendizagem*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.
- Vale, I (1994). Resolução de problemas: Desempenhos de futuros professores de Matemática. In *Actas do V SIEM* (pp. 209 – 222). Lisboa: APM.
- Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Cuadrante*, XI(1), 49-60.
- Varandas, J. & Nunes, P. (1999). Actividades de investigação: uma experiência no 10º ano. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.169 – 173). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Varandas, J. (1994). A Aula de Matemática: Que Alterações? *Actas do ProfMat94*. Lisboa: APM, 129-136.
- Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas. Uma experiência* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Vellas, E. (1996). Donner du sens aux savoir l'école: pas si simple!, In Groupe Français d'Éducation nouvelle, *Construire ses savoirs, Construire sa citoyenneté. De l'école à la cite*. Lion: Chronique sociale, pp. 12-26.
- Veslin, J. & Veslin, O. (1994). Corriger des copies. *Hachete*: Paris (32-66). Tradução de Mª José Dias. Adaptação e supervisão de Jorge Pinto e Leonor Cunha Leal.
- Vial, M. (2001). *Se former pour évaluer: Se donner une problématique et élaborer des concepts*. Bruxelles: De Boeck.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
- Webb, N. & Briars, D. (1990). Assessment in MAThematics Clssrooms, K-8. Em T. Cooney (Ed.), *Teachin3g and Learning Mathematics in the 1990s, 1990 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA: The Council.
- Webb, N. & Coxford, A. (1993). *Assessment in mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM.
- Wertsch, J. (1991). *Voices of mind. A sociocultural approach to mediatian action*. Hemel Mempstead: Havester Wheastheaf.
- Wistedt, I. (1994). Everyday common sense and school mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, 9, 1, 139-147.

- Wittrock, M. & Baker, E. (1991). *Testing and cognition*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em Matemática. Tradução do artigo publicado no *Journal of Research in Mathematics Education*, 27 (4), pp. 458- 477.
- Yin, R. (2002). *Case study research: Design and methods* (Third Ed.). Newbury Park: Sage.
- Zeichner, K. & Liston, D. (1996). *Reflexive teaching: An introduction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Zeichner, K. (1993). A formação reflexiva de professores: ideias e práticas. *Educação, professores* (nº3) 13-52.

ANEXOS

- Anexo I – Guião da entrevista
- Anexo II – Grelha de registo da observação de aulas
- Anexo III – Guião de elaboração do Diário de bordo
- Anexo IV – Guião da reflexão escrita do aluno
- Anexo V – Tarefa 1: unindo os pontos médios de um quadrilátero
- Anexo VI – Tarefa 2: pavimentações
- Anexo VII – Tarefa 4: uma investigação com funções cúbicas
- Anexo VIII – Primeira página do relatório da Rita na actividade pavimentações

Anexo I – Guião da entrevista

Guião de Entrevista

Identificação do aluno (nome fictício): _____

- O que é para ti a Matemática?
- Para que serve a Matemática?
- Como estudas Matemática?
- O que é saber Matemática?
- Gostas ou não de Matemática? E Porquê?
- O que entendes por investigar em Matemática?
- No teu entender o que são tarefas de investigação?
- Que tipo de trabalho te ajuda mais a aprender Matemática?
- Quando tens dificuldades o que costumavas fazer?
- E quando descobres que cometeste erros? Ficas atrapalhado? Que fazes?
- O que achas que os professores valorizam mais nas aulas?
- O que achas que os professores valorizam mais na avaliação?
- Como está a ser a tua adaptação ao 10º ano?
- Encontraste muitas diferenças nas aulas de matemática? Quais?
- Como deveriam ser as aulas de matemática?
- Se tu fosses professor de matemática, como fazias para que os alunos aprendessem verdadeiramente?
- O que pensas da Avaliação?
- O que é mais importante na avaliação?
- É necessário avaliar? Para quê?
- Tens por habito avaliar-te a ti próprio, no sentido de pensar no que já sabes? O que deves fazer para saber o que falta?

Anexo II – Grelha de registo da observação de aula

Grelha de observação em aula

Identificação do aluno: _____

Recursos	Livro, caderno, os colegas, outros...
Intervenções do professor	<p>Nº de solicitações do Professor (colocar X por cada uma):</p> <p>Tipos de questões colocadas:</p>
Intervenções dos colegas	<p>Quais os colegas que interagem com o aluno:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> O que dizem os colegas? Reacção do aluno? </div>
Qual a função do erro para a concretização da tarefa?	<p>Comportamento do aluno:</p> <p>Erros cometidos?</p> <p>Perante o erro?</p>
De que modo o aluno reflecte sobre o processo desenvolvido e reorienta o seu trabalho com vista ao sucesso?	<p>Comentários:</p> <p>Orientação seguida?</p> <p>Comentários finais?</p>

Anexo III – Guião de elaboração do diário de bordo

Diário de bordo

Aula nº

Dia e hora:

Sumário:

Comportamentos observáveis

Descrição do comportamento do aluno ao longo da realização da tarefa

Interacções estabelecidas

Professor-aluno

Aluno-alunos

Alterações ao processo de ensino aprendizagem

Intervenções mais significativas

Reflexão do aluno no final

reações

Dificuldades...

Registo e descrição de episódios significativos:

Anexo IV – Guião da reflexão escrita do aluno

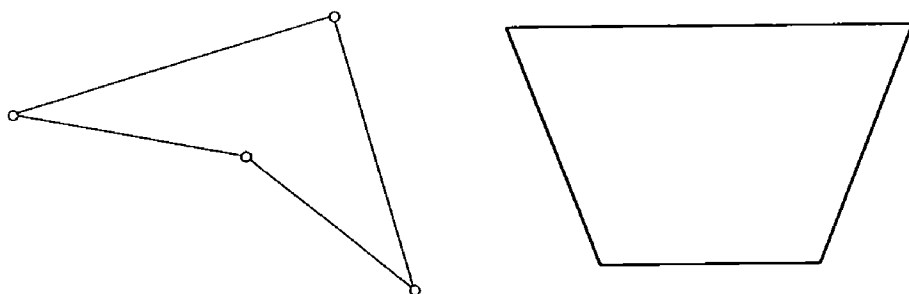
Guião para reflexão escrita do aluno:

Relativamente à tarefa realizada, procura responder às seguintes questões:

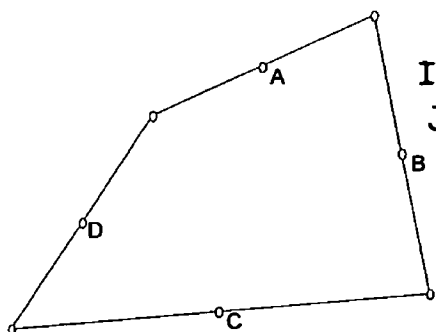
Quais as intervenções do professor que te ajudaram a orientar?
Quais as intervenções dos teus colegas que te ajudaram a orientar?
Ao longo do desenvolvimento das tarefas cometeste erros? Quais? Como os explicas?
Qual a função dos erros cometidos para a concretização da tarefa?
Que balanço fazes do trabalho realizado? Comentários, críticas, sugestões, opiniões, dificuldades, etc...

Anexo V – Tarefa 1: unindo os pontos médios de um quadrilátero

Unindo os pontos médios de um quadrilátero ...



Para um ou vários quadriláteros, determine os seus pontos médios e em cada um deles, construa os segmentos de recta definidos por pontos médios de lados consecutivos.



Investigue que tipo de polígonos obteve.

Justifique a sua conjectura.

Sugestão: Trace uma diagonal do quadrilátero inicial e compare com os lados do polígono obtido.

Investigue as várias propriedades e relações geométricas que podemos estabelecer entre um quadrilátero e o polígono que se obtém unindo os pontos médios de lados consecutivos.

Por exemplo:

- Caso seja possível, a que propriedade deve obedecer um quadrilátero para que, unindo os pontos médios dos lados consecutivos, se obtenha:

Um rectângulo?

Um quadrado?

Um trapézio?

Um losango?

- Qual a relação entre o perímetro do polígono obtido e a soma dos comprimentos das diagonais do quadrilátero original.

- Investigue qual a relação entre as áreas do quadrilátero inicial e do polígono obtido unindo os pontos médios dos lados consecutivos.

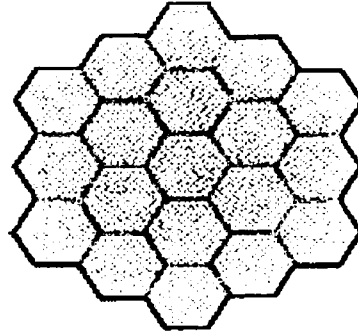
ETC...

Anexo VI – Tarefa 2: pavimentações

Pavimentações

Uma pavimentação consiste em cobrir totalmente uma superfície, repetindo um padrão formado por figuras geométricas de tal forma que nunca se verifique qualquer sobreposição.

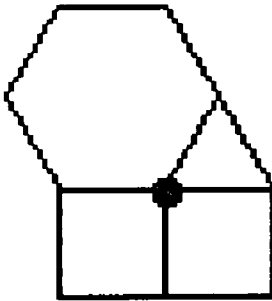
As chamadas pavimentações regulares - são aquelas em que o ladrilho é um polígono regular (ver figura). Ao observar esta pavimentação colocam-se algumas questões: quais os polígonos regulares que pavimentam? Ou quantas pavimentações regulares existem? porquê? A resposta a estas questões é uma pequena investigação.



O endereço seguinte vai ajudar-te na tua pesquisa:

<http://www.apm.pt/apm/numat/menu3.html>

Outras Pavimentações

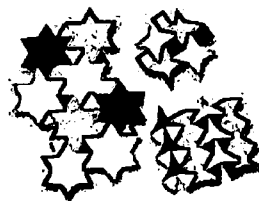


Se admitirmos a utilização de 2 ou mais polígonos regulares.

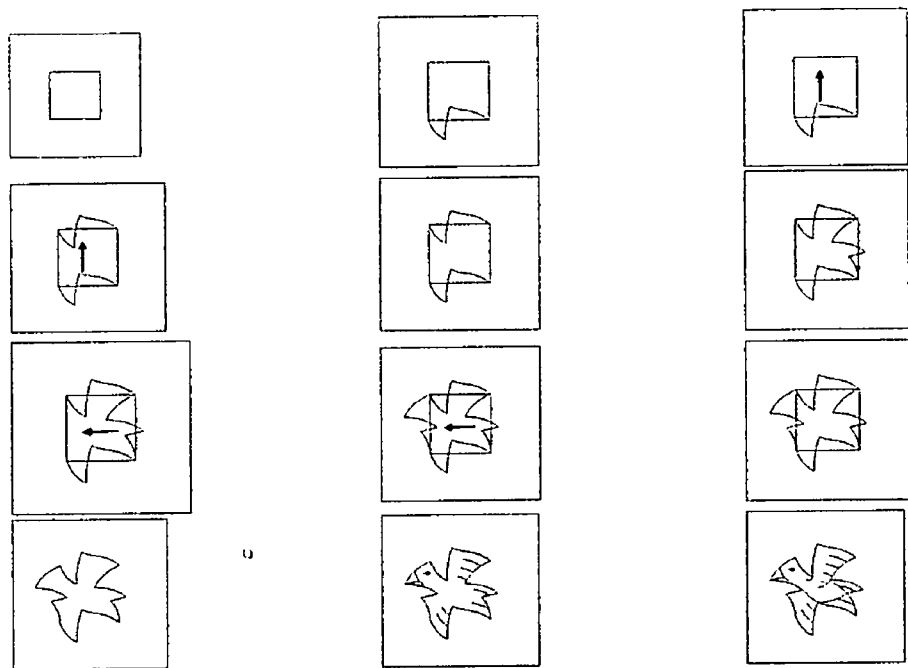
Se cada vértice for contornado pela mesma disposição de polígonos regulares então poderão surgir outras pavimentações?

Por exemplo: usando 1 triângulo equilátero, 2 quadrado e um hexágono regular.

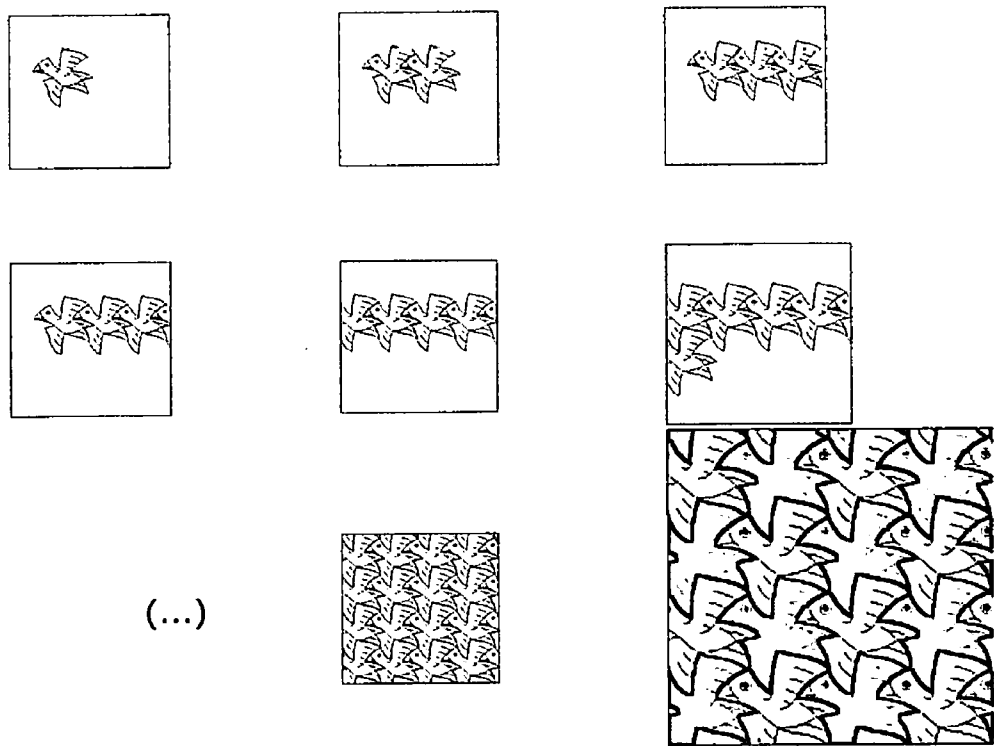
Mas também é possível pavimentar com outras figuras.



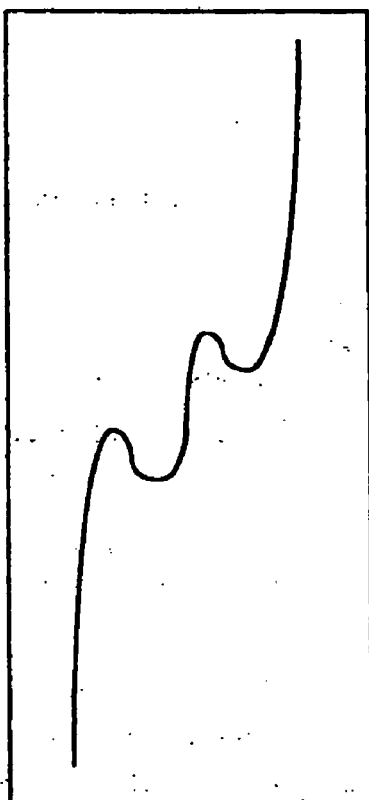
Construção de uma pavimentação
 (http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/index2.htm)



Pavimentação com Translação



**Uma investigação com funções cúbicas
e a calculadora gráfica**



Este pode ser o gráfico de uma função quadrática?

E cúbica?

Porquê?

Investiga e elabora um relatório o mais completo possível da tua investigação.

Sugestão:

Faz um estudo da função cúbica

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para isso:

- estuda $y = x^3$ e $y = -x^3$, verifica nomeadamente número de zeros, monotonia, domínio, contradomínio, continuidade, etc.,
- estuda $y = (x - 2)^3$ e $y = x^3 + 2$
- experimenta depois $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, nos rectângulos de visualização $[-10, 10] \times [-10, 10]$ e $[-3, 3] \times [-2, 2]$

- tenta fazer conjecturas sobre os possíveis aspectos do gráfico de uma função definida por um polinómio do 3º grau.
- faz um estudo mais organizado fazendo variar cada um dos coeficientes a , b , c e d separadamente. Atribui valores positivos e negativos, inteiros e fraccionários, valores grandes e próximos de zero, etc.
- regista de forma cuidada os esboços dos gráficos, as tuas conjecturas, as tuas conclusões.
- Compara o teu estudo com os dos teus colegas.

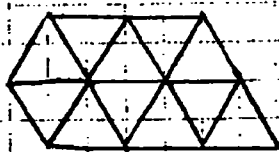
adaptada de "Algebra in a Technological World"

Anexo VIII – Primeira página do relatório da Rita na actividade
pavimentações

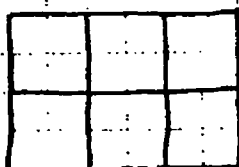
Actividade de Investigação sobre Pavimentações

• pavimentações consistem em cobrir uma superfície com polígonos regulares, irregulares ou outras figuras como se pretende mostrar.

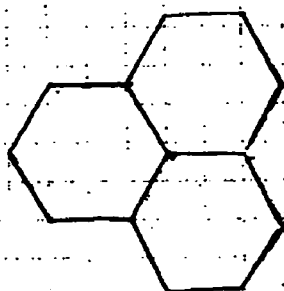
→ os polígonos regulares com os quais é possível pavimentar são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono.



pavimentação com triângulos equiláteros ✓

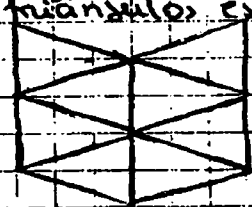


pavimentação c/ quadrados ✓

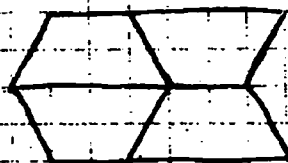


• por isso, existem 3 pavimentações regulares. pavimentação c/ hexágonos ✓

→ para além destes polígonos regulares, alguns irregulares também pavimentam como o triângulo isósceles, o trapézio, o paralelogramo, o triângulo escaleno e losangos



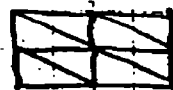
pavimentação c/ triângulos isósceles



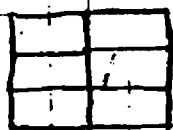
pavimentação c/ trapézios



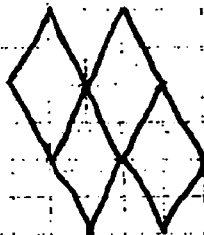
pavimentação c/ paralelogramos



pavimentação c/ triângulo escaleno



pavimentação c/ rectângulos



pavimentação c/ losangos

→ apenas existem três pavimentações regulares pois de todos os polígonos regulares existentes (quadrado, hexágono, pentágono e triângulo equilátero) apenas os três representados anteriormente podem formar uma pavimentação pois o pentágono não os forma.